

## Calculs algébriques

### EXERCICE 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \\
 &= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(4x^2 - 2x + \frac{1}{4}\right) \left(2x - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 8x^3 - 2x^2 - 4x^2 + x + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \\
 &= 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 2.

$$\begin{aligned}
 A &= x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
 B &= x^5 - x^3 + x^2 - 1 \\
 C &= x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 \\
 D &= x^5 - x^3 - x^2 + 1
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 3.

$$\begin{aligned}
 A &= x^4 + x^2 + 1 \\
 B &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
 C &= x^4 + 1
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 4.

$$\begin{aligned}
 A &= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xz + 2xy \\
 B &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 5.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) && \text{(identité remarquable)} \\
 &= e^{-x}e^x \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

### EXERCICE 6.

$$\begin{aligned}
 A &= -(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49 \\
 &= -(6x + 7)(6x - 1) + (6x - 7)(6x + 7) \\
 &= (6x + 7)(-(6x - 1) + 6x - 7) \\
 &= (6x + 7)(-6) \\
 &= -6(6x + 7) \\
 B &= -4(5x - 1)(5x + 4) \\
 C &= 2(10x + 3)(3x - 4) \\
 D &= -8(x + 16)(x + 1) \\
 E &= -4(2x + 5)(2x - 1)
 \end{aligned}$$

- EXERCICE 7.**
- $A = (x-1)^2$  (identité remarquable  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ )
  - $B = (x+2)^2$
  - $C = (x+1)(x+2)$  (car  $-1$  et  $-2$  sont racines de  $x^2 + 3x + 2$ )
  - $D = (x-1)(x-8)$
  - $E = 2(x+2)(x-4)$
  - $F = (x+7)(x-4)$
  - On remarque que  $1$  est racine de  $x^3 - 1$  donc  $G = x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ . En développant et en identifiant les coefficients, on obtient :  $a = b = c = 1$ . Donc  $G = (x-1)(x^2 + x + 1)$ . Le trinôme  $x^2 + x + 1$  ne se factorise pas davantage dans les réels car son discriminant est strictement négatif.
  - $H = (x+1)(x^2 - x + 1)$
  - $I = (x+1)(x+2)(x+3)$
  - $J = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$
  - $K = x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ . Puis en utilisant  $G$  et  $H$  :  $K = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$ .
  - $L = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x+1)(x-1)$

- EXERCICE 8.**
- $A = (x+y-b)(x+y+b)$
  - $B = -3(14x+3y)(4x-y)$
  - $C = (x+3)(x+2)(x-1)$
  - $D = 7(2x-3)^2 xy$
  - $E = 2(x^2 y^2 + 2)(x^2 y^2 - 2)xy$
  - $F = (x^2 - y^2 - 1)(x - 2y)$
  - $G = -(a^2 + b^2)(4x^2 + y)(4x^2 - y)$
  - $H = (x+y)(x-y+1)$
  - $I = (x+1)(y+1)$
  - $J = (x-1)(y-1)$
  - $K = (x+y)(x+1)^2$

- EXERCICE 9.**
- Les solutions de  $x^2 - 5x + 4 = 0$  sont  $1$  et  $4$ . Les solutions de  $2x^2 - x - 1 = 0$  sont  $1$  et  $-\frac{1}{2}$ .
  -

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\left(\frac{x^2-5x+4}{2x+6}\right)}{\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-9}\right)} \\
 &= \frac{x^2-5x+4}{2x+6} \times \frac{x^2-9}{2x^2-x-1} \\
 &= \frac{(x-1)(x-4)(x-3)(x+3)}{2(x+3)2(x-1)(x+\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{(x-4)(x-3)}{2 \times 2(x+\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{(x-3)(x-4)}{2(2x+1)}
 \end{aligned}$$

**EXERCICE 10.** L'équation  $x^2 = 2018x - 2017$  est équivalente à  $x^2 - 2018x - 2017 = 0$ . On constate que  $1$  est une solution. On peut donc factoriser  $x^2 - 2018x - 2017$  ainsi :  $x^2 - 2018x - 2017 = (x-1)(x-a)$ . En développant et en identifiant les coefficients, on trouve  $a = 2017$ . Finalement, l'équation  $x^2 = 2018x - 2017$  est équivalente à  $(x-1)(x-2017) = 0$ , et cette équation a exactement deux solutions :  $1$  et  $2017$ .

**EXERCICE 11.**

$$A = 4\sqrt{2} x\sqrt{x}$$

**EXERCICE 12.**

$$A = x^{4n} y^{-2n-1}$$

**EXERCICE 13.** 1.  $A = x^{15}$ 

2.  $B = x^{105}$

3.  $C = \frac{1}{1000} x^2$

4.  $D = \frac{2a^9 b^5}{3c^7}$

5.  $E = \frac{16b^{38}}{a^{34}}$

**EXERCICE 14.** 1.  $A = 4$ 

2.  $B = 4$

3.  $C = 4\sqrt{6}$

4.  $D = -13\sqrt{3}$

5.  $E = 2\sqrt{7}$

**EXERCICE 15.** 1. L'équation (E) a un sens si et seulement si  $x$  est différent de  $-1$ .2. Soit  $x$  un réel différent de  $-1$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x+3} &\iff \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3x+3} = 0 \\ &\iff \frac{18 - 3(x+1) - 4}{6(x+1)} = 0 \\ &\iff -3x + 11 = 0 \\ &\iff x = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

L'équation (E) possède donc une solution et une seule :  $\frac{11}{3}$ .**EXERCICE 16.** 1. L'équation (F) a un sens si et seulement si  $x \geq 0$ .2. Les solutions de l'équation  $t^2 - 4t + 3 = 0$  sont 1 et 3.3. Soit  $x \geq 0$ . On remarque que  $x$  est solution de (F) si et seulement si  $\sqrt{x}$  est solution de l'équation de la question précédente. Ainsi : (F)  $\iff (\sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 3) \iff (x = 1 \text{ ou } x = 9)$ .**EXERCICE 17.** L'égalité  $21^2 + 220^2 = 221^2$  est équivalente à  $21^2 = 221^2 - 220^2$ . Or :

$$21^2 - 220^2 = (221 - 220)(221 + 220) = 441 = 400 + 2 \times 20 + 1 = (20 + 1)^2 = 21^2$$

**EXERCICE 18.** 1. L'expression  $\ln(-3x + 1)$  a un sens si et seulement si  $x < \frac{1}{3}$ .2. Soit  $x < \frac{1}{3}$ . On résout :

$$\begin{aligned} \ln(-3x + 1) = y &\iff e^{\ln(-3x+1)} = e^y \\ &\iff -3x + 1 = e^y \\ &\iff x = \frac{1 - e^y}{3} \end{aligned}$$

L'équation  $\ln(-3x + 1) = y$  possède donc une et une seule solution :  $\frac{1 - e^y}{3}$ .**EXERCICE 19.**

$$e^{x+1} + 2 = y \iff e^{x+1} = y - 2$$

On va passer aux logarithmes mais il faut distinguer deux cas :

— Si  $y - 2 > 0$  (c'est-à-dire si  $y > 2$ ), alors :  $e^{x+1} = y - 2 \iff x + 1 = \ln(y - 2) \iff x = \ln(y - 2) - 1$ .— Si  $y - 2 \leq 0$  (c'est-à-dire si  $y \leq 2$ ), alors l'équation  $e^{x+1} = y - 2$  n'a pas de solution, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

En conclusion : si  $y \leq 2$ , alors l'équation  $e^{x+1} + 2 = y$  n'a pas de solution, et si  $y > 2$ , alors l'équation  $e^{x+1} + 2 = y$  a une et une seule solution, qui est  $\ln(y-2) - 1$ .

**EXERCICE 20.** 1. On a d'une part :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}$$

Et d'autre part :

$$(n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

On a donc bien :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

2. On a :

$$a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1} = \frac{an(n+1) + b(n+1) + cn}{n(n+1)} = \frac{an^2 + (a+b+c)n + b}{n(n+1)}$$

Donc, pour que l'égalité :

$$\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

soit vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il suffit que :

$$a = 1 \text{ et } a + b + c = 1 \text{ et } b = 1$$

Cela équivaut à :  $a = 1$  et  $b = 1$  et  $c = -1$ . On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{2017} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{2017} \sqrt{\frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{2017} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{2017} \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ &\quad + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\quad + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\quad + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &\quad \dots \\ &\quad + 1 + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} \\ &\quad + 1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= 2017 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2018} \\ &= 2018 - \frac{1}{2018} \end{aligned}$$

**EXERCICE 21** ((identité de Diophante)). D'une part :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$$

D'autre part :

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2 c^2 + 2acbd + b^2 d^2 + a^2 d^2 - 2adbc + b^2 c^2 = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$$

On constate donc qu'il y a bien égalité entre  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  et  $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .

## Suites et récurrence

**EXERCICE 22.** — Initialisation : pour  $n = 1$ , on a d'une part  $1 + 2 + \dots + n = 1$ , et d'autre part  $\frac{n(n+1)}{2} = 1$ . L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour  $n = 1$ .

— Hérédité : supposons que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour un certain entier  $n \geq 1$ . Alors :

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie au rang  $n + 1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**EXERCICE 23.** — Initialisation : pour  $n = 0$ , on a  $u_n = 2$  et  $\frac{2}{2^{n+1}} = 2$  donc on a bien  $u_n = \frac{2}{2^{n+1}}$ .

— Hérédité : supposons  $u_n = \frac{2}{2^{n+1}}$  pour un certain entier naturel  $n$ . Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} = \frac{\frac{2}{2^{n+1}}}{1 + \frac{2}{2^{n+1}}} = \frac{2}{2^{n+1} + 2} = \frac{2}{2(n+1) + 1}$$

Notre égalité est donc vraie au rang  $n + 1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n = \frac{2}{2^{n+1}}$ .

**EXERCICE 24.** 1. — Initialisation : pour  $n = 1$ , on a  $\frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = a$  et  $u_n = a$  donc on a bien  $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$ .

— Hérédité : supposons que  $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$  pour un certain entier  $n \geq 1$ . Alors :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} u_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \left( \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} \right) = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \times \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^n$$

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$ .

2. Comme  $\left|\frac{-3}{10}\right| < 1$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = 0$$

Et donc, en utilisant la relation établie dans la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{13}$$

**EXERCICE 25.** — Initialisation : pour  $n = 1$ , on a  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$  et  $1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .  
Donc l'égalité qu'on veut démontrer est vraie pour  $n = 1$ .

— Hérédité : supposons notre égalité vraie pour un certain entier  $n \geq 1$ . Alors :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{1 - (n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Notre égalité est donc vraie au rang  $n + 1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

**EXERCICE 26.** — Initialisation : pour  $n = 1$ , on a d'une part  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1$ , et d'autre part  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$ .  
L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour  $n = 1$ .

— Hérédité : supposons  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  vraie pour un certain entier  $n \geq 1$ . On a alors :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6)$$

D'autre part :  $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ . Donc on a bien :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Et notre égalité est vraie au rang  $n+1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**EXERCICE 27.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

— Initialisation : pour  $n = 1$ , on a d'une part  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = 1$ , et d'autre part  $\left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 1$ . L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour  $n = 1$ .

— Hérédité : On suppose  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$  vraie pour un certain  $n \geq 1$ . On a alors :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 (n^2 + 4(n+1)) = \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Notre égalité est donc vraie au rang  $n+1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ .

**EXERCICE 28.** 1. On a  $3u_1 = u_0 + 4 = 9$  donc  $u_1 = 3$ . Et  $3u_2 = u_1 + 4 = 7$  donc  $u_2 = \frac{7}{3}$ .

2. — Initialisation : on a bien  $u_0 \geq 2$  car  $u_0 = 5$ .

— Hérédité : supposons  $u_n \geq 2$  pour un certain entier naturel  $n$ . Alors :  $3u_{n+1} = u_n + 4 \geq 2 + 4 = 6$ . Donc  $u_{n+1} \geq \frac{6}{3} = 2$ . Notre inégalité est donc vraie au rang  $n+1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq 2$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$3(u_{n+1} - u_n) = 3u_{n+1} - 3u_n = u_n + 4 - 3u_n = 2(2 - u_n) \leq 0 \quad (\text{car } u_n \geq 2)$$

Donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ . La suite  $(u_n)$  est décroissante.

4. On sait que toute suite décroissante et minorée est convergente. Or la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée (par 2) d'après les questions précédentes. Donc la suite  $(u_n)$  est convergente.

Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ . En passant à la limite dans la relation  $3u_{n+1} = u_n + 4$ , on obtient :  $3\ell = \ell + 4$ . On en déduit :  $\ell = 2$ .

5. Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$3v_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2) = 3u_{n+1} - 6 = u_n + 4 - 6 = u_n - 2 = v_n$$

Donc :  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ . Ainsi, la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .

6. Pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \frac{1}{3^{n-1}}$ . Puis :  $u_n = 2 + v_n = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$ .

7.

$$T_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k v_0 = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (2 + v_k) = \left(\sum_{k=0}^n 2\right) + T_n = 2(n+1) + T_n$$

8. Comme  $-1 < \frac{1}{3} < 1$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{9}{2}$$

Et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n+1) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

**EXERCICE 29.** On définit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par :  $u_0 = 2$ ,  $v_n = \frac{2}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1.  $v_0 = 1$ ,  $u_1 = \frac{3}{2}$ ,  $v_1 = \frac{4}{3}$ ,  $u_2 = \frac{17}{12}$ ,  $v_2 = \frac{24}{17}$ .

2. — Initialisation :  $u_0$  et  $v_0$  sont bien compris entre 1 et 2, donc les encadrements qu'on veut établir sont vrais au rang  $n = 0$ .

— Hérédité : supposons  $1 \leq u_n \leq 2$  et  $1 \leq v_n \leq 2$  pour un certain entier naturel  $n$ . On a alors  $2 = 1 + 1 \leq u_n + v_n \leq 2 + 2 = 4$ , donc :  $1 \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq 2$ , c'est-à-dire  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ . La fonction inverse est décroissante sur  $]0, +\infty[$  donc :  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{1}$ , d'où :  $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ . Nos deux encadrements sont donc vrais au rang  $n + 1$ .

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont compris entre 1 et 2.

3. On a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n + v_n}{2}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 4 + v_n^2}{2(u_n + v_n)}$$

D'autre part :

$$(u_n - v_n)^2 = u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2 = u_n^2 - 4 + v_n^2$$

On a donc bien :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. Soit  $n$  un entier naturel. Un carré est positif donc  $(u_n - v_n)^2 > 0$ . De plus, on sait que  $u_n$  et  $v_n$  sont positifs donc  $2(u_n + v_n) \geq 0$ . Ainsi :  $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$  et donc, avec la question précédente :  $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$ . D'où :  $v_{n+1} \leq u_{n+1}$ . Cela prouve que  $v_n \leq u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . De plus, on a bien  $v_0 \leq u_0$  car  $v_0 = 1$  et  $u_0 = 2$ . Finalement :  $v_n \leq u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

5. Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0 \quad \text{car } v_n \leq u_n$$

Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante. Ensuite :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{u_{n+1}}}{\frac{2}{u_n}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 \quad \text{car } 0 < u_{n+1} \leq u_n$$

De plus la suite  $(v_n)$  est à termes strictement positifs donc la suite  $(v_n)$  est croissante.

6. Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes car elles sont respectivement décroissante minorée et croissante majorée.

7. Soit  $n$  un entier naturel. On a vu que  $u_n$  et  $v_n$  sont compris entre 1 et 2, donc :  $1 \leq u_n \leq 2$  et  $-2 \leq -v_n \leq -1$ . On en déduit :  $1 + (-2) \leq u_n - v_n \leq 2 + (-1)$ . En particulier, on a bien :  $u_n - v_n \leq 1$ .

8. Soit  $n$  un entier naturel. On a  $u_n \geq 1$  et  $v_n \geq 1$  donc  $2(u_n + v_n) \geq 4$  et donc :  $\frac{1}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{1}{4}$ . En multipliant par le nombre positif  $(u_n - v_n)^2$ , on obtient :  $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{(u_n - v_n)^2}{4}$ . On en déduit :  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{(u_n - v_n)(u_n - v_n)}{4} \leq \frac{u_n - v_n}{4}$  (car  $0 \leq u_n - v_n \leq 1$  d'après la question précédente).

9. — Initialisation : pour  $n = 0$ , on a  $u_n - v_n = 2 - 1 = 1$  et  $\frac{1}{4^n} = 1$  donc on a bien  $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$ .  
 — Hérédité : supposons  $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$  vrai pour un certain entier naturel  $n$ . On a alors :  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n - v_n}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^{n+1}}$ , donc notre inégalité est vraie au rang  $n + 1$ .  
 Le principe de récurrence conclut :  $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .
10. En déduire que  $\ell = m$  puis déterminer  $\ell$ . Pour tout entier naturel  $n$  :  $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$ . Par encadrement, on a donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ . Mais par ailleurs,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell - m = 0$ . Donc  $\ell - m = 0$ , et donc  $\ell = m$ .  
 En passant à la limite dans la relation  $v_n = \frac{2}{u_n}$ , on obtient :  $\ell = \frac{2}{\ell}$ . Donc  $\ell^2 = 2$  et donc  $\ell = \sqrt{2}$  ou  $\ell = -\sqrt{2}$ . Mais comme  $\ell$  est la limite d'une suite à termes positifs, on a  $\ell \geq 0$  et donc  $\ell = \sqrt{2}$ .

## Études de fonctions

**EXERCICE 30.** 1. L'expression  $A(x)$  a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

- (a)  $x \neq 0$   
 (b)  $1 + \frac{1}{x} \neq 0$   
 (c)  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0$

Réolvons l'équation  $1 + \frac{1}{x} = 0$  :

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{1}{x} = -1 \iff x = -1$$

Réolvons l'équation  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0$  :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0 \iff \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \iff 1 + \frac{1}{x} = -1 \iff 1 + \frac{1}{x} = -1 \iff \frac{1}{x} = -2 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Conclusion : l'expression  $A(x)$  a un sens si et seulement si  $x$  est différent de 0, de  $-1$  et de  $-\frac{1}{2}$ .

2.

$$A(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

**EXERCICE 31.** On pose :

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}}}$$

1. L'expression  $B(x)$  a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

- (a)  $1 - x \neq 0$   
 (b)  $1 + \frac{1}{1-x} \neq 0$   
 (c)  $1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}} \neq 0$

Réolvons l'équation  $1 + \frac{1}{1-x} = 0$  :

$$1 + \frac{1}{1-x} = 0 \iff \frac{1}{1-x} = -1 \iff 1-x = -1 \iff x = 2$$

Réolvons l'équation  $1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}} = 0$  :

$$1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}} = 0 \iff \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}} = 1 \iff 1 + \frac{1}{1-x} = 2 \iff \frac{1}{1-x} = 1 \iff 1-x = 1 \iff x = 0$$

Conclusion : l'expression  $B(x)$  a un sens si et seulement si  $x$  est différent de 1, de 2 et de 0.

2.

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\frac{2-x}{1-x}}} = \frac{1}{1 - \frac{2-x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{2x-2}{2-x}} = \frac{1}{\frac{x}{2-x}} = \frac{2-x}{x}$$



**EXERCICE 32.** L'expression  $C(x)$  a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

1.  $25 - x^2 > 0$

2.  $x^2 - 9 \geq 0$

On a :  $25 - x^2 > 0 \iff (5 - x)(5 + x) > 0$ .

$x$	$-\infty$	$-5$	$5$	$+\infty$
$5 - x$	+	+	0	-
$5 + x$	-	0	+	+
$(5 - x)(5 + x)$	-	0	+	-

Donc :  $25 - x^2 > 0 \iff x \in ]-5, 5[$ .

De même :  $x^2 - 9 \geq 0 \iff (x - 3)(x + 3) \geq 0$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$	
$x - 3$	-	-	0	+	
$x + 3$	-	0	+	+	
$(x - 3)(x + 3)$	+	0	-	0	+

Donc :  $x^2 - 9 \geq 0 \iff x \in ]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ .

Conclusion : l'expression  $C(x)$  a un sens si et seulement si  $x \in ]-5, -3] \cup [3, 5[$ .

**EXERCICE 33.** On pose  $f(x) = 4 + e^{x-3}$ .

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

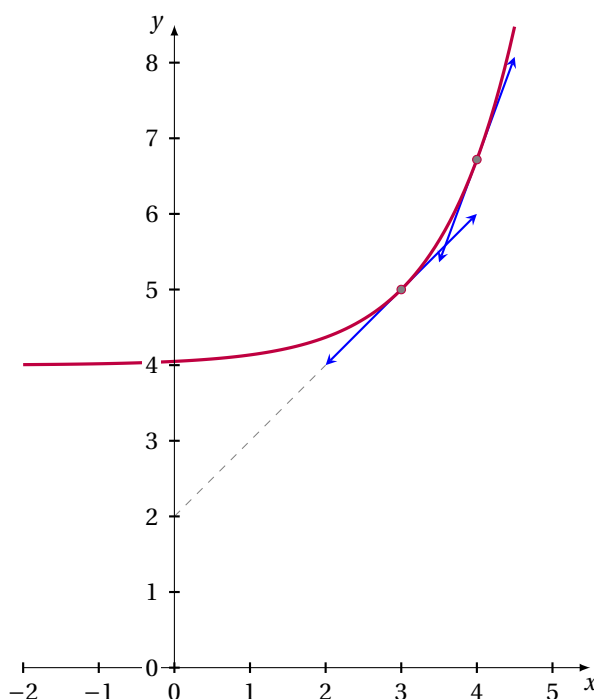
(il n'y a pas de forme indéterminée)

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-3} > 0$ . D'où le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variations de $f$		

3. La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 3 a pour équation :  $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = x - 3 + 5 = x + 2$ .

La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 4 a pour équation :  $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = e(x - 4) + 4 + e = ex + 4 - 3e$ .



4. On résout :

$$f(x) = y \iff 4 + e^{x-3} = y \iff e^{x-3} = y - 4$$

On aimerait passer au logarithme... Distinguons deux cas :

- Si  $y - 4 \leq 0$  (c'est-à-dire si  $y \leq 4$ ), alors l'équation  $e^{x-3} = y - 4$  n'a pas de solution (car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives).
- Si  $y - 4 > 0$ , alors  $e^{x-3} = y - 4 \iff x - 3 = \ln(y - 4) \iff x = 3 + \ln(y - 4)$ .

Conclusion : si  $y \leq 4$ , alors l'équation  $f(x) = y$  n'a pas de solution. Si par contre  $y > 4$ , alors l'équation  $f(x) = y$  possède une et une seule solution qui est :  $3 + \ln(y - 4)$ .

**EXERCICE 34.** 1. On pose  $u(x) = x$  et  $v(x) = x^2 + 1$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont polynomiales donc définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la fonction  $v$  ne s'annule jamais car :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1$ . La fonction  $f$  est donc définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Résolvons l'équation  $f'(x) = 0$  :

$$f'(x) = 0 \iff (1 - x)(1 + x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Il existe exactement deux points de  $\mathcal{C}$  où la tangente est horizontale : ce sont les points d'abscisses  $-1$  et  $1$ .

2. Commençons par les limites :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On trouve de même :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

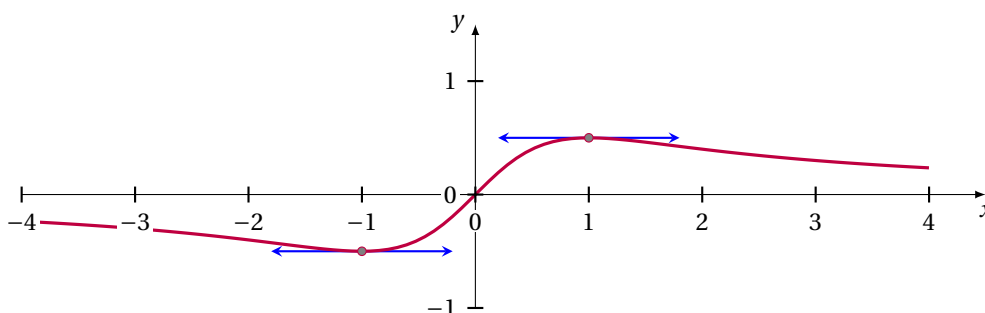
On a vu que, pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$ . Donc  $f'(x)$  est du signe de  $(1 - x)(1 + x)$ . Pour étudier le signe de ce produit, faisons un tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$1 - x$	$+$	$+$	$0$	$-$
$1 + x$	$-$	$0$	$+$	$+$
$(1 - x)(1 + x)$	$-$	$0$	$0$	$-$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
Variations de $f$	$0 \swarrow \searrow \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \nearrow \end{matrix} \nearrow \searrow \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \nearrow \end{matrix} \searrow 0$				

3. Dessin de  $\mathcal{C}$  :



**EXERCICE 35.** On pose  $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ .

- La fonction  $f$  est définie en tout réel différent de 1.
- On a :

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Et :

$$f(x) = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

Donc la courbe représentative de  $f$  ne possède pas d'asymptote horizontale. Ensuite :

$$x^2+x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$$

$$x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0_-, \quad x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0_+$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty, \quad f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$$

Donc la droite d'équation  $x = 1$  est une asymptote verticale pour la courbe représentative de  $f$ .

3. Posons  $u(x) = x^2 + x - 1$  et  $v(x) = x - 1$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  car polynomiales. La fonction  $f$  est donc dérivable sur son domaine de définition, comme quotient de fonctions dérivables (avec un dénominateur qui ne s'annule pas). Soit  $x$  un réel différent de 1 :

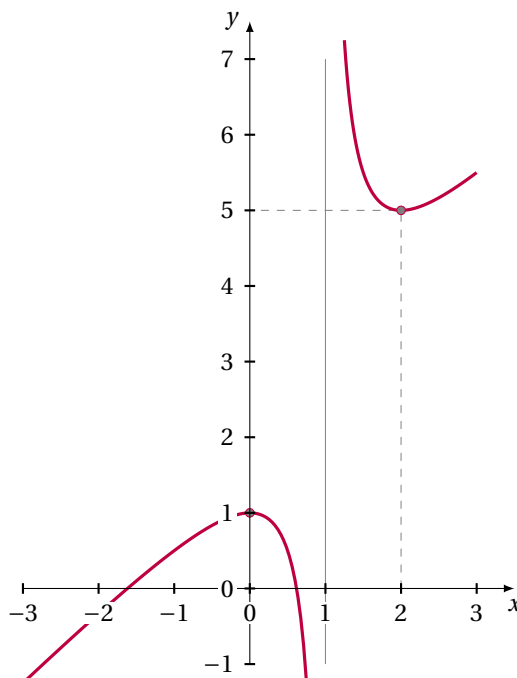
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x-1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Posons  $a(x) = x^2 - 2x$  et  $b(x) = (x-1)^2$ . Les fonctions  $a$  et  $b$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  (car polynomiales) et la fonction  $b$  ne s'annule qu'au point 1, donc la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  comme quotient de fonctions dérivables. Soit  $x$  un réel différent de 1 :

$$f''(x) = \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b(x)^2} = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

4. Pour tout réel  $x$  différent de 1,  $f'(x)$  est du signe de  $x(x-2)$ . D'où le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$x$	-	0	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
Variations de $f$	$-\infty \nearrow 1 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 5 \nearrow +\infty$		



- EXERCICE 36.** 1. On résout l'inéquation  $2x + 3 > 0$  :

$$2x + 3 > 0 \iff x > \frac{-3}{2}$$

Donc la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $I = ]\frac{-3}{2}, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$  :

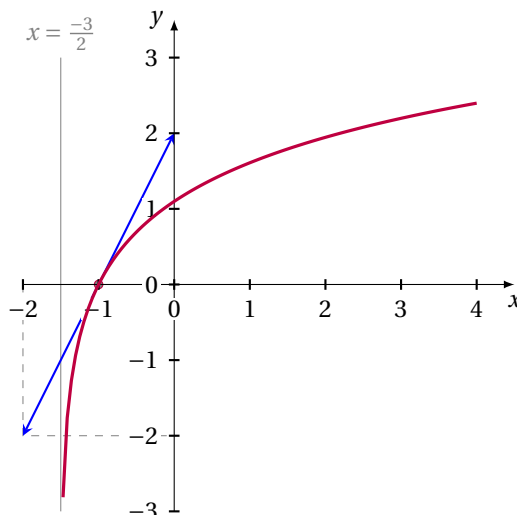
$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} > 0$$

Donc la fonction  $f$  est croissante sur  $I$ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x) = -\infty$$

(il n'y a pas de forme indéterminée dans ces calculs de limite)

3. La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $-1$  a pour équation :  $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = 2(x+1) + \ln(1) = 2x + 2$ .



**EXERCICE 37.** 1. On a :

$$2e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x > -\ln(2)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $2e^x - 1 > 0$  est l'intervalle  $] -\ln(2), +\infty[$ .

2. La fonction  $f$  est définie sur  $I = ] -\ln(2), +\infty[$ .

3. Soit  $x$  appartenant à  $I$  :

$$f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$$

Comme  $x \in I$ , on a  $2e^x - 1 > 0$  (d'après la première question). On a aussi  $2e^x > 0$ . Donc  $f'(x) > 0$ .

4. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\ln(2)} 2e^x - 1 = 2e^{-\ln(2)} - 1 = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\ln(2)} f(x) = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5. Soit  $x$  un élément de  $I$ .

$$f(x) - g(x) = \ln(2e^x - 1) - x - \ln(2) = \ln(2e^x - 1) - \ln(e^x) - \ln(2) = \ln\left(\frac{2e^x - 1}{2e^x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right)$$

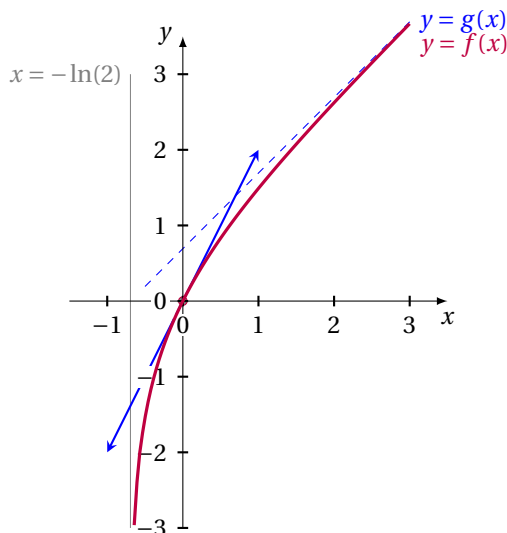
Or  $\frac{1}{2e^x} > 0$  donc  $1 - \frac{1}{2e^x} < 1$ , puis en passant au logarithme :

$$f(x) - g(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right) < \ln(1) = 0$$

Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right) = \ln(1) = 0$$

6. La droite  $T$  a pour équation :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x$
7. La question 5 montre que la droite d'équation  $y = g(x)$  est une asymptote (oblique) pour la courbe représentative de  $f$ , au voisinage de  $+\infty$ . La question 5 montre également que la courbe représentative de  $f$  se situe partout *en dessous* de son asymptote.



8. On a :

$$f(x) = y \iff \ln(2e^x - 1) = y \iff 2e^x - 1 = e^y \iff e^x = \frac{e^y + 1}{2}$$

Or  $\frac{e^y + 1}{2} > 0$  donc on peut passer au logarithme :

$$f(x) = y \iff x = \ln\left(\frac{e^y + 1}{2}\right)$$

**EXERCICE 38.** On pose  $f(x) = x^3 + ax - 1$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (car polynomiale). Soit  $x$  un réel. On a :

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

Or  $3x^2 \geq 0$  et  $a > 0$ , donc  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Or une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois (il en est de même pour une fonction strictement décroissante), donc l'équation  $f(x) = 0$  possède au plus une solution.

**EXERCICE 39.** On souhaite comparer  $a = 1000^{1001}$  et  $b = 1001^{1000}$ . Pour cela on pose  $q = \frac{b}{a}$ .

1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$ . Pour tout réel  $x > -1$  :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

Comme  $1 + x > 0$ , le nombre  $f'(x)$  est du signe de  $-x$ . On a donc le tableau suivant :

$x$	-1	0	$+\infty$
$-x$		+	0
$f'(x)$		+	0
Variations de $f$			

(il est inutile de calculer les limites de  $f$  en  $-1$  et en  $+\infty$  pour la suite de l'exercice)

2. Le tableau ci-dessus montre que pour tout  $x > -1$ ,  $f(x) \leq 0$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} \ln(q) &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a) = 1000\ln(1001) - 1001\ln(1000) = 1000(\ln(1001) - \ln(1000)) - \ln(1000) \\ &= 1000\ln\left(\frac{1001}{1000}\right) - \ln(1000) = 1000\ln\left(1 + \frac{1}{1000}\right) - \ln(1000) = 1000\left(\ln\left(1 + \frac{1}{1000}\right) - \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right) - \ln(1000) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(q) = 1000f\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 - \ln(1000)$$

4. D'après les questions précédentes :  $\ln(q) \leq 1 - \ln(1000) < 0$ . Donc :  $q < 1$ , et donc  $b < a$ .

**EXERCICE 40.** Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$  et  $f(x) = x^3 + 6x - 6x\ln(x)$ .

1. La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= +\infty \quad (\text{pas de forme indéterminée}) \end{aligned}$$

3. On a vu que pour tout  $x > 0$  :

$$g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

On a  $x > 0$  et  $x + 1 > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $x - 1$ . D'où le tableau suivant :

$x$	0	1	$+\infty$	
$x - 1$		-	0	+
$g'(x)$		-	0	+
Variations de $g$	$+\infty$			$+\infty$

4. D'après le tableau précédent,  $g(x) > 0$  pour tout réel  $x > 0$ .

5. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $x > 0$  :

$$f'(x) = 3x^2 + 6 - 6(\ln(x) + 1) = 3x^2 - 6\ln(x)$$

On remarque que :  $f'(x) = 3g(x)$ .

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{6}{x^2} - 6\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x\ln(x) = 0 \end{aligned}$$

7. On a vu que, pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f'(x) = 3g(x) > 0$ . D'où le tableau suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variations de $f$		

**EXERCICE 41.** Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \ln(x + 1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$  et  $f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$ .

1. La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $x > 0$ .

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{(-1)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)}{x(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

2. D'après la question précédente,  $g'(x) < 0$  pour tout réel  $x > 0$ . Donc la fonction  $g$  est décroissante sur son intervalle de définition.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
Variations de $g$		

3. Posons  $u(x) = x$  et  $v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et dérivables sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x > 0$ :

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2 + x}$$

Posons  $w(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = u(x)v(x)$ . La fonction  $w$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  (produit de deux fonctions dérivables) et :

$$w'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2 + x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x) = e^{w(x)}$  donc la fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $x > 0$  :

$$f'(x) = w'(x)e^{w(x)} = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

D'autre part :

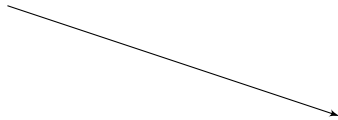
$$g(x) = \ln(x + 1) - \ln(x) - \frac{1}{1+x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

On a donc bien :

$$f'(x) = g(x)f(x)$$



4. Soit  $x > 0$ . On a  $g(x) > 0$  et  $f(x) > 0$  donc, avec la question précédente,  $f'(x) > 0$ . D'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
Variations de $f$		

**EXERCICE 42.** 1.  $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x+1}$

2.  $x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{9}$
3.  $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x}$
4.  $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \sqrt{2x+1}$
5.  $x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$
6.  $x \mapsto \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2$
7.  $x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$
8.  $x \mapsto x - e^{-x}$
9.  $x \mapsto \ln(e^x + 1)$

## Systemes linéaires

**EXERCICE 43.** On a :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

Pour avoir pour tout réel  $x$  différent de 0 et de  $-1$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

il *suffit* donc de choisir  $a$  et  $b$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc  $a = 1$  et  $b = -1$  conviennent. Finalement, pour tout réel  $x$  différent de 0 et de  $-1$ , on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

**EXERCICE 44.** On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel  $x$  différent de 1 et de  $-1$  :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1}$$

**EXERCICE 45.** On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel  $x$  différent de 0 et de 2 :

$$\frac{3x+1}{(x-2)x} = \frac{\frac{7}{2}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x}$$

**EXERCICE 46.** Déterminer des réels  $a, b, c, d$  tels que, pour tout réel  $x$  différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1}$$

On a d'une part :

$$(1-x+x^2)^2 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

Et d'autre part :

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1} = \frac{ax^3(x-1) + bx^2(x-1) + cx(x-1) + d}{x-1} = \frac{ax^4 + (-a+b)x^3 + (-b+c)x^2 - cx + d}{x-1}$$

Donc, pour que :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1}$$

pour tout réel  $x$  différent de 1, il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ -a+b & = -2 \\ -b+c & = 3 \\ -c & = -2 \\ d & = 1 \end{cases}$$

Ce système a pour unique solution :  $a = 1, b = -1, c = 2, d = 1$ . Donc, pour tout réel  $x$  différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = x^3 - x^2 + 2x + \frac{1}{x-1}$$

**EXERCICE 47.** On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel  $x$  différent de 1 :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$

**EXERCICE 48.** On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel  $x$  différent de  $-1$  :

$$\frac{x^3}{x^3+1} = 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

**EXERCICE 49.** 1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+(a+b))e^x$$

2. D'après la question précédente, pour que  $f : x \mapsto (ax+b)e^x$  soit une primitive de  $g : x \mapsto xe^x$ , il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a+b & = 0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution :  $a = 1, b = -1$ . Donc, une primitive de  $g$  est la fonction  $x \mapsto (x-1)e^x$ .

3. De même, pour que  $f : x \mapsto (ax+b)e^x$  soit une primitive de  $h$ , il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & = 2 \\ a+b & = 1 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution :  $a = 2, b = -1$ . Donc, une primitive de  $h$  est la fonction  $x \mapsto (2x-1)e^x$ .

**EXERCICE 50.** 1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = a \cos(x) + (ax+b)(-\sin(x)) + c \sin(x) + (cx+d) \cos(x) = (cx+(a+d)) \cos(x) + (-ax+(-b+c)) \sin(x)$$

2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction  $g : x \mapsto x \cos(x)$ .

Pour que la fonction  $f$  de la première question soit une primitive de  $g$ , il *suffit* de choisir  $a, b, c, d$  solution du système :

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + d = 0 \\ -a = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc la fonction  $x \mapsto \cos(x) + x \sin(x)$  est une primitive de la fonction  $g : x \mapsto x \cos(x)$ .

3. De même, pour que la fonction  $f$  de la première question soit une primitive de la fonction  $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$ , il suffit de choisir  $a, b, c, d$  solution du système :

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + d = 0 \\ -a = 1 \\ -b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc la fonction  $x \mapsto (1 - x) \cos(x) + (1 + x) \sin(x)$  est une primitive de la fonction  $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$ .