Voici des exercices plutôt *calculatoires*. Le cours de mathématiques de MPSI ne se résumera pas à des calculs, bien au contraire ! Cependant, s'entraîner à calculer est essentiel pour bien commencer l'année.

Calculs algébriques

EXERCICE 1. Développer et ordonner : $A = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$.

EXERCICE 2. Développer et ordonner :

1. $A = (x-1)(x^2+x+1)$
2. $B = (x+1)(x-1)(x^2-x+1)$
3. $C = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
4. $D = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

EXERCICE 3. Développer et ordonner :

1. $A = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$
2. $B = (1+x+x^2)^2$
3. $C = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$

EXERCICE 4. Développer et ordonner :

1. $A = (x+y+z)^2$
2. $B = (x+y)^3$

EXERCICE 5. Soit x un réel. Simplifier :

$$A = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

EXERCICE 6. Factoriser :

1. $A = -(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
2. $B = 25-(10x+3)^2$
3. $C = (6x-8)(4x-5)+36x^2-64$
4. $D = (-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$
5. $E = 36-(-4x-4)^2$

EXERCICE 7. Le résultat suivant pourra être utile : si α est une racine d'un polynôme $P(x)$, alors $P(x)$ peut s'écrire $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme qui peut se calculer, par exemple, par identification des coefficients.

Factoriser :

1. $A = x^2-2x+1$
2. $B = x^2+4x+4$
3. $C = x^2+3x+2$
4. $D = x^2-9x+8$
5. $E = 2x^2-4x-16$
6. $F = x^2+3x-28$
7. $G = x^3-1$
8. $H = x^3+1$
9. $I = x^3+6x^2+11x+6$
10. $J = x^4-1$
11. $K = x^6-1$
12. $L = x^{12}-1$

EXERCICE 8. Factoriser :

1. $A = (x+y)^2 - b^2$
2. $B = (x^2+6xy+9y^2) - 169x^2$
3. $C = (x+2)^2 + x^2(x+2) + x^2 - 3x - 10$
4. $D = 28x^3y + 63xy - 84x^2y$
5. $E = 2x^5y^5 - 8xy$
6. $F = x^2(x-2y) - y^2(x-2y) - x + 2y$
7. $G = y^2(a^2+b^2) + 16x^4(-a^2-b^2)$
8. $H = x^2 - y^2 + x + y$
9. $I = xy + x + y + 1$
10. $J = xy - x - y + 1$
11. $K = x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

EXERCICE 9.

1. Résoudre les équations $x^2 - 5x + 4 = 0$ et $2x^2 - x - 1 = 0$.
2. Soit x un réel. En supposant qu'elle est bien définie, simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{\left(\frac{x^2-5x+4}{2x+6}\right)}{\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-9}\right)}$$

EXERCICE 10. Résoudre l'équation : $x^2 = 2020x - 2019$

EXERCICE 11. Soit x un réel strictement positif. Simplifier : $A = x\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x^3} + \frac{2x^2}{\sqrt{2x}}$.

EXERCICE 12. Soient x et y deux réels strictement positifs. soit $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier :

$$A = \left(\frac{x^{-2n}y^{3n}}{x^{2n}y^{n-1}}\right)^{-1}$$

EXERCICE 13. Dans cet exercice, toutes les variables sont des réels strictement positifs. Simplifier :

1. $A = x^7x^5x^3$
2. $B = ((x^7)^5)^3$
3. $C = \frac{(2x^4)(5x^6)}{(10x^2)^4}$
4. $D = \frac{\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{a^{-2}b^3c^4}}{\frac{3(a^{-1}b^{-2}c)^2}{ac^2}}$
5. $E = \frac{\left(\frac{a^4b^{-4}}{(a^{-2}b^3)^{-2}}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-3}b^2)^3}{a^8b^{-10}}\right)^{-2}}$

EXERCICE 14. Simplifier :

1. $A = \sqrt{4^2}$
2. $B = \sqrt{(-4)^2}$
3. $C = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$
4. $D = \sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$
5. $E = \sqrt{(2+\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

EXERCICE 15. On considère l'équation (E) : $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x+3}$.

1. Pour quels réels x l'équation (E) a-t-elle un sens ?
2. Pour quels réels x l'équation (E) est-elle vraie ?

EXERCICE 16. On considère l'équation $(F) : x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$.

1. Pour quels réels x l'équation (F) a-t-elle un sens ?
2. Résoudre l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$.
3. Résoudre l'équation (F).

EXERCICE 17. Montrer que $21^2 + 220^2 = 221^2$.

EXERCICE 18.

1. Pour quels réels x l'expression $\ln(-3x+1)$ a-t-elle un sens ?
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\ln(-3x+1) = y$ (d'inconnue x) et discuter en fonction du paramètre y.

EXERCICE 19. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $e^{x+1} + 2 = y$ (d'inconnue x). On discutera suivant la valeur de y.

EXERCICE 20.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :
$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$
3. Déduire des questions précédentes le calcul de :
$$S = \sum_{n=1}^{2019} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

EXERCICE 21. Soient a, b, c, d quatre réels. Démontrer que :
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

Suites et récurrence

EXERCICE 22. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 23. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

EXERCICE 24. Soit a un réel. On définit une suite (u_n) en posant $u_1 = a$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = \frac{4 - 3u_n}{10}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$.
2. Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 25. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

EXERCICE 26. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXERCICE 27. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

EXERCICE 28. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
3. Démontrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.
8. Déterminer les limites des suites (S_n) et (T_n).

EXERCICE 29. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. En déduire (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq u_n$.
5. Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n).
6. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. On notera ℓ la limite de (u_n) et m la limite de (v_n).
7. Démontrer (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 1$.
8. En déduire (toujours sans récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.
9. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$.
10. En déduire que $\ell = m$ puis déterminer ℓ.

Études de fonctions

EXERCICE 30. On pose :

$$A(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $A(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $A(x)$.

EXERCICE 31. On pose :

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $B(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $B(x)$.

EXERCICE 32. Pour quel réels x l'expression suivante a-t-elle un sens ?

$$C(x) = \frac{7 - \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EXERCICE 33. On pose $f(x) = 4 + e^{x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et calculer les limites de f aux bornes de son domaine.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 3 et 4.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) en discutant selon les valeurs de y.

EXERCICE 34. Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les points où $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.
2. Dresser le tableau des variations de f. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dessiner $\mathscr{C}$ et ses tangentes horizontales.

EXERCICE 35. On pose $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les éventuelles asymptotes verticales et horizontales de la courbe représentative de f.
3. Calculer f' et f''.
4. Dresser le tableau des variations de f et dessiner la courbe représentative de f.

EXERCICE 36. On pose $f(x) = \ln(2x+3)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier f (variations et limites aux bornes de son domaine).
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse -1.

EXERCICE 37. On pose $f(x) = \ln(2e^x - 1)$.

1. Résoudre l'inéquation : $2e^x - 1 > 0$.
2. En déduire le domaine I de définition de f.
3. Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle est strictement positive partout sur I.
4. Calculer les limites de f aux bornes de I.
5. On pose $g(x) = x + \ln(2)$. Montrer que $f(x) - g(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right)$. En déduire le signe de $f(x) - g(x)$, ainsi que la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Calculer l'équation de T, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
7. Dessiner les graphes de f et g ainsi que la droite T. Comment interpréter graphiquement la question 5 ?
8. Soit y un réel. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x (discuter en fonction du paramètre y).

EXERCICE 38. Soit $a > 0$ un réel. Démontrer que l'équation $x^3 + ax - 1 = 0$ possède au plus une solution réelle (on pourra introduire une fonction).

EXERCICE 39. On souhaite comparer $a = 1000^{1001}$ et $b = 1001^{1000}$. Pour cela on pose $q = \frac{b}{a}$.

1. On pose, pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. Calculer la dérivée f' puis dresser le tableau des variations de f.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$.
3. Montrer que $\ln(q) = 1000 f\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 - \ln(1000)$.
4. Conclure.

EXERCICE 40. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ et $f(x) = x^3 + 6x - 6x\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de g.
2. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.
5. Calculer la dérivée de f.
6. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

7. Dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 41. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1. Calculer la dérivée g' (on factorisera et simplifiera au maximum le résultat).
2. En déduire le tableau des variations de g, en précisant la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = g(x)f(x)$.
4. En déduire le tableau des variations de f.

EXERCICE 42. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{4x+1}$
2. $x \mapsto 2x^3 - \frac{x^2}{3}$
3. $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2}$
4. $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
5. $x \mapsto e^{3x} + x(x-1)$
6. $x \mapsto x(x+1)(x+2)$
7. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$
8. $x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x}$
9. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

Systèmes linéaires

EXERCICE 43. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de -1 :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

EXERCICE 44. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1 et de -1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

EXERCICE 45. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de 2 :

$$\frac{3x+1}{(x-2)x} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x}$$

EXERCICE 46. Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1}$$

EXERCICE 47. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

EXERCICE 48. Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{x^3}{x^3+1} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

EXERCICE 49.

1. Soient a et b deux réels. Dériver la fonction $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto xe^x$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto (2x+1)e^x$.

EXERCICE 50.

1. Soient a, b, c, d, quatre réels. Dériver la fonction $f : x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto x\cos(x)$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$.