Calculs algébriques

EXERCICE 1.

$$\begin{aligned}
A &= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(4x^2 - 2x + \frac{1}{4}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right) \\
&= 8x^3 - 2x^2 - 4x^2 + x + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \\
&= 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

EXERCICE 2.

$$A = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$
$$B = x^5 - x^3 + x^2 - 1$$
$$C = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$$
$$D = x^5 - x^3 - x^2 + 1$$

EXERCICE 3.

$$A = x^4 + x^2 + 1$$
$$B = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$
$$C = x^4 + 1$$

EXERCICE 4.

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xz + 2xy$$
$$B = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

EXERCICE 5.

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) && \text{(identité remarquable)} \\
&= e^{-x}e^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

EXERCICE 6.

$$\begin{aligned}
A &= -(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 \\
&= -(6x+7)(6x-1) + (6x-7)(6x+7) \\
&= (6x+7)(-(6x-1) + 6x - 7)) \\
&= (6x+7)(-6)) \\
&= -6(6x+7)
\end{aligned}$$

$$B = -4(5x-1)(5x+4)$$
$$C = 2(10x+3)(3x-4)$$
$$D = -8(x+16)(x+1)$$
$$E = -4(2x+5)(2x-1)$$

EXERCICE 7.

1. $A=(x-1)^2$ (identité remarquable $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$)
2. $B=(x+2)^2$
3. $C=(x+1)(x+2)$ (car -1 et -2 sont racines de x^2+3x+2)
4. $D=(x-1)(x-8)$
5. $E=2(x+2)(x-4)$
6. $F=(x+7)(x-4)$
7. On remarque que 1 est racine de x^3-1 donc $G=x^3-1=(x-1)(ax^2+bx+c)$. En développant et en identifiant les coefficients, on obtient : $a=b=c=1$. Donc $G=(x-1)(x^2+x+1)$. Le trinôme x^2+x+1 ne se factorise pas davantage dans les réels car son discriminant est strictement négatif.
8. $H=(x+1)(x^2-x+1)$
9. $I=(x+1)(x+2)(x+3)$
10. $J=(x^2)^2-1^2=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$
11. $K=x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3-1)(x^3+1)$. Puis en utilisant G et H : $K=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.
12. $L=\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$

EXERCICE 8.

1. $A=(x+y-b)(x+y+b)$
2. $B=-3\left(14x+3y\right)\left(4x-y\right)$
3. $C=(x+3)(x+2)(x-1)$
4. $D=7(2x-3)^2xy$
5. $E=2\left(x^2y^2+2\right)\left(x^2y^2-2\right)xy$
6. $F=\left(x^2-y^2-1\right)\left(x-2y\right)$
7. $G=-\left(a^2+b^2\right)\left(4x^2+y\right)\left(4x^2-y\right))$
8. $H=(x+y)(x-y+1)$
9. $I=(x+1)(y+1)$
10. $J=(x-1)(y-1)$
11. $K=(x+y)(x+1)^2$

EXERCICE 9.

1. Les solutions de $x^2-5x+4=0$ sont 1 et 4. Les solutions de $2x^2-x-1=0$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$.
2.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left(\frac{x^2-5x+4}{2x+6}\right)}{\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-9}\right)} \\
&= \frac{x^2-5x+4}{2x+6}\times\frac{x^2-9}{2x^2-x-1} \\
&= \frac{(x-1)(x-4)(x-3)(x+3)}{2(x+3)2(x-1)(x+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{(x-4)(x-3)}{2\times 2(x+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{(x-3)(x-4)}{2(2x+1)}
\end{aligned}$$

EXERCICE 10. L'équation $x^2=2018x-2017$ est équivalente à $x^2-2018x-2017=0$. On constate que 1 est une solution. On peut donc factoriser $x^2-2018x-2017$ ainsi : $x^2-2018x-2017=(x-1)(x-a)$. En développant et en identifiant les coefficients, on trouve $a=2017$. Finalement, l'équation $x^2=2018x-2017$ est équivalente à $(x-1)(x-2017)=0$, et cette équation a exactement deux solutions : 1 et 2017.

EXERCICE 11.

$$A=4\sqrt{2}\,x\sqrt{x}$$

EXERCICE 12.

$$A = x^{4n} y^{-2n-1}$$

EXERCICE 13.
1. $A = x^{15}$
2. $B = x^{105}$
3. $C = \frac{1}{1000} x^2$
4. $D = \frac{2a^9 b^5}{3c^7}$
5. $E = \frac{16 b^{38}}{a^{34}}$

EXERCICE 14.
1. $A = 4$
2. $B = 4$
3. $C = 4\sqrt{6}$
4. $D = -13\sqrt{3}$
5. $E = 2\sqrt{7}$

EXERCICE 15.
1. L'équation (E) a un sens si et seulement si x est différent de -1.
2. Soit x un réel différent de -1.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x+3} &\iff \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3x+3} = 0\\ &\iff \frac{18-3(x+1)-4}{6(x+1)} = 0\\ &\iff -3x+11 = 0\\ &\iff x = \frac{11}{3}\end{aligned}$$

L'équation (E) possède donc une solution et une seule : $\frac{11}{3}$.

EXERCICE 16.
1. L'équation (F) a un sens si et seulement si $x \geq 0$.
2. Les solutions de l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$ sont 1 et 3.
3. Soit $x \geq 0$. On remarque que x est solution de (F) si et seulement si $\sqrt{x}$ est solution de l'équation de la question précédente. Ainsi : $(F) \iff (\sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 3) \iff (x = 1 \text{ ou } x = 9)$.

EXERCICE 17. L'égalité $21^2 + 220^2 = 221^2$ est équivalente à $21^2 = 221^2 - 220^2$. Or :

$$221^2 - 220^2 = (221-220)(221+220) = 441 = 400 + 2 \times 20 + 1 = (20+1)^2 = 21^2$$

EXERCICE 18.
1. L'expression $\ln(-3x+1)$ a un sens si et seulement si $x < \frac{1}{3}$.
2. Soit $x < \frac{1}{3}$. On résout :

$$\begin{aligned}\ln(-3x+1) = y &\iff e^{\ln(-3x+1)} = e^y\\ &\iff -3x+1 = e^y\\ &\iff x = \frac{1-e^y}{3}\end{aligned}$$

L'équation $\ln(-3x+1) = y$ possède donc une et une seule solution : $\frac{1-e^y}{3}$.

EXERCICE 19.

$$e^{x+1} + 2 = y \iff e^{x+1} = y - 2$$

On va passer aux logarithmes mais il faut distinguer deux cas :
— Si $y - 2 > 0$ (c'est-à-dire si $y > 2$), alors : $e^{x+1} = y - 2 \iff x + 1 = \ln(y-2) \iff x = \ln(y-2) - 1$.
— Si $y - 2 \leq 0$ (c'est-à-dire si $y \leq 2$), alors l'équation $e^{x+1} = y - 2$ n'a pas de solution, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

En conclusion : si $y \leq 2$, alors l'équation $e^{x+1} + 2 = y$ n'a pas de solution, et si $y > 2$, alors l'équation $e^{x+1} + 2 = y$ a une et une seule solution, qui est $\ln(y-2) - 1$.

EXERCICE 20.

1. Le plus rapide est de remarquer que $j = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = e^{i2\pi/3}$. On a donc : $j^3 = (e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$
2. On a $j^4 = j^3 j = j$ (car $j^3 = 1$). On a $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j}$ (somme géométrique de raison $j \neq 1$). Donc $1 + j + j^2 = \frac{1-1}{1-j} = 0$.
3.

$$\begin{aligned}
A &= (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) \\
&= (a^2+abj+acj^2+ab+b^2j+bcj^2+ac+bcj+c^2j^2)(a+bj^2+cj) \\
&= a^3+a^2bj+a^2cj^2+a^2b+ab^2j+abcj^2+a^2c+abcj+ac^2j^2 \\
&\quad +a^2bj^2+ab^2j^3+abcj^4+ab^2j^2+b^3j^3+b^2cj^4+abcj^2+b^2cj^3+bc^2j^4 \\
&\quad +a^2cj+abcj^2+ac^2j^3+abcj+b^2cj^2+bc^2j^3+ac^2j+bc^2j^2+c^3j^3 \\
&= a^3+a^2bj+a^2cj^2+a^2b+ab^2j+abcj^2+a^2c+abcj+ac^2j^2 \\
&\quad +a^2bj^2+ab^2+abcj+ab^2j^2+b^3+b^2cj+abcj^2+b^2c+bc^2j \\
&\quad +a^2cj+abcj^2+ac^2+abcj+b^2cj^2+bc^2+ac^2j+bc^2j^2+c^3 \\
&= a^3+a^2b(j+1+j^2)+a^2c(j^2+1+j)+ab^2(j+1+j^2)+abc(3j^2+3j) \\
&\quad +ac^2(j^2+1+j)+b^3+b^2c(j+1+j^2)+bc^2(j+1+j^2)+c^3 \\
&= a^3+b^3+c^3-3abc
\end{aligned}$$

EXERCICE 21.

1. On a d'une part :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Et d'autre part :

$$(n^2+n+1)^2 = n^4+2n^3+3n^2+2n+1$$

On a donc bien :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

2. On a :

$$a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1} = \frac{an(n+1)+b(n+1)+cn}{n(n+1)} = \frac{an^2+(a+b+c)n+b}{n(n+1)}$$

Donc, pour que l'égalité :

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *il suffit* que :

$$a = 1 \text{ et } a+b+c = 1 \text{ et } b = 1$$

Cela équivaut à : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = -1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

3. On a :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{2017} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{2017} \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{2017} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{2017} 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\
&= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2} \\
&\qquad +1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\
&\qquad\qquad +1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\
&\qquad\qquad\qquad +1+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +1+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018} \\
&= 2017+\frac{1}{1}-\frac{1}{2018} \\
&= 2018-\frac{1}{2018}
\end{aligned}
$$

EXERCICE 22. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on pose :

$$f(z) = \frac{z-2}{z-1}$$

1. L'équation $f(z) = i$ a un sens si et seulement si $z \neq 1$. Elle admet une et une seule solution qui est : $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$.
2. On a $(w-\alpha)(w+\alpha) = w-\alpha^2$. Il nous suffit donc de montrer que $\alpha^2 = i$. Or on a bien :

$$\alpha^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$$

3. L'équation $w^2 = i$ est donc équivalente à $(w-\alpha)(w+\alpha) = 0$. Or un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs (au moins) est nul. L'équation $w^2 = i$ possède donc exactement deux solutions : α et $-\alpha$.
4. L'équation $f(z)^2 = i$ est équivalentes à $f(z) = \alpha$ ou $f(z) = -\alpha$. En résolvant séparément ces deux dernières équations, on trouve finalement que l'équation $f(z)^2 = i$ possède deux solutions qui sont :

$$-\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}-2\right)}-\frac{i\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}-2\right)} \quad \text{et} \quad \frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}-\frac{i\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}$$

EXERCICE 23 ((identité de Diophante))**.** D'une part :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

D'autre part :

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2 = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

On constate donc qu'il y a bien égalité entre $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ et $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

EXERCICE 24 ((identité d'Euler))**.** Même démonstration que dans l'exercice précédent, avec un peu plus de patience !

Suites et récurrence

EXERCICE 25. — Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1+2+\cdots+n=1$, et d'autre part $\frac{n(n+1)}{2}=1$. L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour $n=1$.

— Hérédité : supposons que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain entier $n\geq 1$. Alors :

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie au rang $n+1$.

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n\geq 1$, $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 26. — Initialisation : pour $n=0$, on a $u_n=2$ et $\frac{2}{2n+1}=2$ donc on a bien $u_n=\frac{2}{2n+1}$.

— Hérédité : supposons $u_n=\frac{2}{2n+1}$ pour un certain entier naturel n. Alors :

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}=\frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}}=\frac{2}{2n+1+2}=\frac{2}{2(n+1)+1}$$

Notre égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n\geq 0$, $u_n=\frac{2}{2n+1}$.

EXERCICE 27. 1. — Initialisation : pour $n=1$, on a $\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}=a$ et $u_n=a$ donc on a bien $u_n=\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$.

— Hérédité : supposons que $u_n=\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$ pour un certain entier $n\geq 1$. Alors :

$$u_{n+1}=\frac{2}{5}-\frac{3}{10}u_n=\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\left(\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}\right)=\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\times\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n}=\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n}$$

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$.

2. Comme $\left|\frac{-3}{10}\right|<1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}=0$$

Et donc, en utilisant la relation établie dans la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{4}{13}$$

EXERCICE 28. — Initialisation : pour $n=1$, on a $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$ et $1-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Donc l'égalité qu'on veut démontrer est vraie pour $n=1$.

— Hérédité : supposons notre égalité vraie pour un certain entier $n\geq 1$. Alors :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}$$

Notre égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n\geq 1$, $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 29. — Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2+2^2+\cdots+n^2=1$, et d'autre part $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1$. L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour $n=1$.

— Hérédité : supposons $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ vraie pour un certain entier $n\geq 1$. On a alors :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)$$

D'autre part : $(n+2)(2(n+1)+1)=(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$. Donc on a bien :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Et notre égalité est vraie au rang $n+1$.

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n\geq 1$, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 30. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

— Initialisation : pour $n = 1$, on a d'une part $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 1$, et d'autre part $\left(\frac{(n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$. L'égalité qu'il faut démontrer est donc vraie pour $n = 1$.

— Hérédité : On suppose $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ vraie pour un certain $n \geq 1$. On a alors :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2 + 4(n+1)\right) = \left(\frac{((n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Notre égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Le principe de récurrence conclut : pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

EXERCICE 31. 1. On a $3u_1 = u_0 + 4 = 9$ donc $u_1 = 3$. Et $3u_2 = u_1 + 4 = 7$ donc $u_2 = \frac{7}{3}$.

2. — Initialisation : on a bien $u_0 \geq 2$ car $u_0 = 5$.
   — Hérédité : supposons $u_n \geq 2$ pour un certain entier naturel n. Alors : $3u_{n+1} = u_n + 4 \geq 2 + 4 = 6$. Donc $u_{n+1} \geq \frac{6}{3} = 2$. Notre inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

   Le principe de récurrence conclut : pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 2$.
3. Soit n un entier naturel. On a :

$$3(u_{n+1} - u_n) = 3u_{n+1} - 3u_n = u_n + 4 - 3u_n = 2(2 - u_n) \leq 0 \quad \text{(car } u_n \geq 2\text{)}$$

   Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.
4. On sait que toute suite décroissante et minorée est convergente. Or la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 2) d'après les questions précédentes. Donc la suite (u_n) est convergente.

   Notons ℓ la limite de (u_n). En passant à la limite dans la relation $3u_{n+1} = u_n + 4$, on obtient : $3\ell = \ell + 4$. On en déduit : $\ell = 2$.
5. Soit n un entier naturel. On a :

$$3v_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2) = 3u_{n+1} - 6 = u_n + 4 - 6 = u_n - 2 = v_n$$

   Donc : $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$. Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
6. Pour tout entier naturel n : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \frac{1}{3^{n-1}}$. Puis : $u_n = 2 + v_n = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$.
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k v_0 = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(2 + v_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n+1} 2\right) + T_n = 2(n+1) + T_n$$

8. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{9}{2}$$

   Et :

$$\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$$

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

EXERCICE 32. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $v_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{17}{12}$, $v_2 = \frac{24}{17}$.
2. — Initialisation : u_0 et v_0 sont bien compris entre 1 et 2, donc les encadrements qu'on veut établir sont vrais au rang $n = 0$.
   — Hérédité : supposons $1 \le u_n \le 2$ et $1 \le v_n \le 2$ pour un certain entier naturel n. On a alors $2 = 1 + 1 \le u_n + v_n \le 2 + 2 = 4$, donc : $1 \le \frac{u_n + v_n}{2} \le 2$, c'est-à-dire $1 \le u_{n+1} \le 2$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_{n+1}} \le \frac{1}{1}$, d'où : $1 \le v_{n+1} \le 2$. Nos deux encadrements sont donc vrais au rang $n + 1$.

   Le principe de récurrence conclut : pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont compris entre 1 et 2.
3. On a :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n+v_n}{2}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 8}{2(u_n + v_n)} == \frac{u_n^2 - 4 + v_n^2}{2(u_n + v_n)}$$
   D'autre part :
$$(u_n - v_n)^2 = u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2 = u_n^2 - 4 + v_n^2$$
   On a donc bien :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. Soit n un entier naturel. Un carré est positif donc $(u_n - v_n)^2 > 0$. De plus, on sait que u_n et v_n sont positifs donc $2(u_n + v_n) \ge 0$. Ainsi : $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \ge 0$ et donc, avec la question précédente : $u_{n+1} - v_{n+1} \ge 0$. D'où : $v_{n+1} \le u_{n+1}$. Cela prouve que $v_n \le u_n$ pour tout entier $n \ge 1$. De plus, on a bien $v_0 \le u_0$ car $v_0 = 1$ et $u_0 = 2$. Finalement : $v_n \le u_n$ pour tout entier naturel n.
5. Soit n un entier naturel. On a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \le 0 \quad \text{car } v_n \le u_n$$
   Donc la suite (u_n) est décroissante. Ensuite :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{u_{n+1}}}{\frac{2}{u_n}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \ge 1 \quad \text{car } 0 < u_{n+1} \le u_n$$
   De plus la suite (v_n) est à termes strictement positifs donc la suite (v_n) est croissante.
6. Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes car elles sont respectivement décroissante minorée et croissante majorée.
7. Soit n un entier naturel. On a vu que u_n et v_n sont compris entre 1 et 2, donc : $1 \le u_n \le 2$ et $-2 \le -v_n \le -1$. On en déduit : $1 + (-2) \le u_n - v_n \le 2 + (-1)$. En particulier, on a bien : $u_n - v_n \le 1$.
8. Soit n un entier naturel. On a $u_n \ge 1$ et $v_n \ge 1$ donc $2(u_n + v_n) \ge 4$ et donc : $\frac{1}{2(u_n+v_n)} \le \frac{1}{4}$. En multipliant par le nombre positif $(u_n - v_n)^2$, on obtient : $\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \le \frac{(u_n-v_n)^2}{4}$. On en déduit : $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{(u_n-v_n)(u_n-v_n)}{4} \le \frac{u_n - v_n}{4}$ (car $0 \le u_n - v_n \le 1$ d'après la question précédente).
9. — Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_n - v_n = 2 - 1 = 1$ et $\frac{1}{4^n} = 1$ donc on a bien $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$.
   — Hérédité : supposons $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$ vrai pour un certain entier naturel n. On a alors : $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{u_n - v_n}{4} \frac{\frac{1}{4^n}}{4} = \frac{1}{4^{n+1}}$, donc notre inégalité est vraie au rang $n + 1$.

   Le principe de récurrence conclut : $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$ est vraie pour tout entier naturel n.
10. En déduire que $\ell = m$ puis déterminer ℓ. Pour tout entier naturel n : $0 \le u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$. Par encadrement, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. Mais par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \ell - m = 0$. Donc $\ell - m = 0$, et donc $\ell = m$.

    En passant à la limite dans la relation $v_n = \frac{2}{u_n}$, on obtient : $\ell = \frac{2}{\ell}$. Donc $\ell^2 = 2$ et donc $\ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$. Mais comme ℓ est la limite d'une suite à termes positifs, on a $\ell \ge 0$ et donc $\ell = \sqrt{2}$.

Études de fonctions

EXERCICE 33. 1. L'expression $A(x)$ a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

(a) $x \neq 0$

(b) $1+\frac{1}{x} \neq 0$

(c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \neq 0$

Résolvons l'équation $1+\frac{1}{x}=0$:

$$1+\frac{1}{x}=0 \iff \frac{1}{x}=-1 \iff x=-1$$

Résolvons l'équation $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0 \iff \frac{1}{1+\frac{1}{x}}=-1 \iff 1+\frac{1}{x}=-1 \iff 1+\frac{1}{x}=-1 \iff \frac{1}{x}=-2 \iff x=\frac{-1}{2}$$

Conclusion : l'expression $A(x)$ a un sens si et seulement si x est différent de 0, de -1 et de $\frac{-1}{2}$.

2.
$$A(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x+1}{2x+1}$$

EXERCICE 34. On pose :

$$B(x)=\frac{1}{1-\frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}}$$

1. L'expression $B(x)$ a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

(a) $1-x \neq 0$

(b) $1+\frac{1}{1-x} \neq 0$

(c) $1-\frac{2}{1+\frac{1}{1-x}} \neq 0$

Résolvons l'équation $1+\frac{1}{1-x}=0$:

$$1+\frac{1}{1-x}=0 \iff \frac{1}{1-x}=-1 \iff 1-x=-1 \iff x=2$$

Résolvons l'équation $1-\frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}=0$:

$$1-\frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}=0 \iff \frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}=1 \iff 1+\frac{1}{1-x}=2 \iff \frac{1}{1-x}=1 \iff 1-x=1 \iff x=0$$

Conclusion : l'expression $B(x)$ a un sens si et seulement si x est différent de 1, de 2 et de 0.

2.
$$B(x)=\frac{1}{1-\frac{2}{1+\frac{1}{1-x}}}=\frac{1}{1-\frac{2}{\frac{2-x}{1-x}}}=\frac{1}{1-\frac{2-2x}{2-x}}=\frac{1}{1+\frac{2x-2}{2-x}}=\frac{1}{\frac{x}{2-x}}=\frac{2-x}{x}$$

EXERCICE 35. L'expression $C(x)$ a un sens si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies :

1. $25-x^2>0$
2. $x^2-9 \geq 0$

On a : $25-x^2>0 \iff (5-x)(5+x)>0$.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5-x)(5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $25-x^2>0 \iff x\in]-5,5[$.

De même : $x^2-9\geq 0 \iff (x-3)(x+3)\geq 0$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $x^2-9\geq 0 \iff x\in]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$.

Conclusion : l'expression $C(x)$ a un sens si et seulement si $x\in]-5,-3]\cup[3,5[$.

EXERCICE 36. On pose $f(x)=4+e^{x-3}$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=4,\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

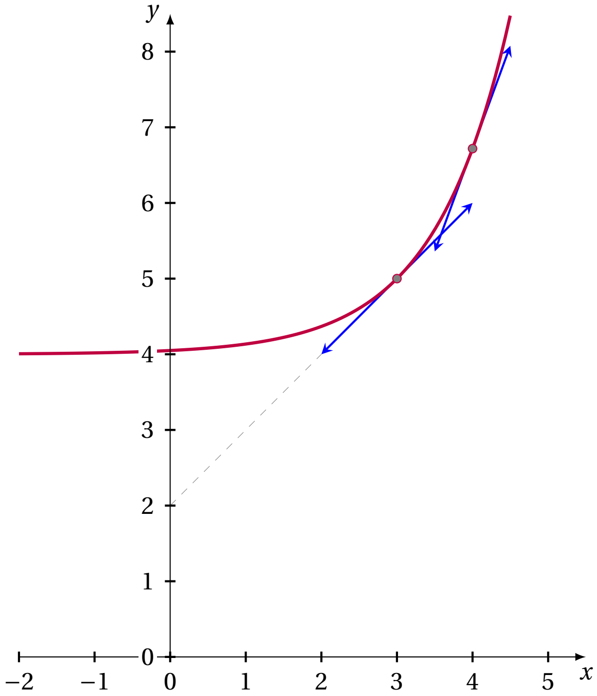
   (il n'y a pas de forme indéterminée)

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=e^{x-3}>0$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variations de f	4	$\nearrow$	$+\infty$

3. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 a pour équation : $y=f'(3)(x-3)+f(3)=x-3+5=x+2$.

   La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 a pour équation : $y=f'(4)(x-4)+f(4)=e(x-4)+4+e=ex+4-3e$.



4. On résout :

$$f(x) = y \iff 4 + e^{x-3} = y \iff e^{x-3} = y - 4$$

On aimerait passer au logarithme...Distinguons deux cas :
— Si $y - 4 \leq 0$ (c'est-à-dire si $y \leq 4$), alors l'équation $e^{x-3} = y - 4$ n'a pas de solution (car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives).
— Si $y - 4 > 0$, alors $e^{x-3} = y - 4 \iff x - 3 = \ln(y-4) \iff x = 3 + \ln(y-4)$.
Conclusion : si $y \leq 4$, alors l'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution. Si par contre $y > 4$, alors l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution qui est : $3 + \ln(y-4)$.

Exercice 37. 1. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$. Les fonctions u et v sont polynomiales dont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction v ne s'annule jamais car : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1$. La fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

Résolvons l'équation $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Il existe exactement deux points de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale : ce sont les points d'abscisses -1 et 1.

2. Commençons par les limites :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On trouve de même :

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

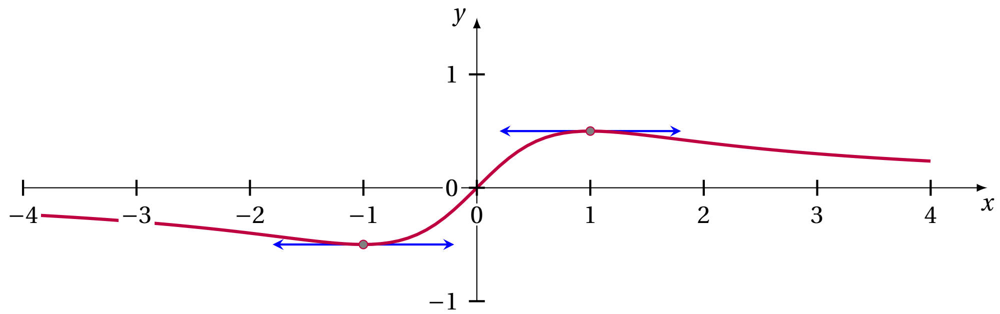
On a vu que, pour tout réel x : $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)(1+x)$. Pour étudier le signe de ce produit, faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

3. Dessin de $\mathscr{C}$:



Exercice 38. On pose $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.

1. La fonction f est définie en tout réel différent de 1.
2. On a :

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Et :

$$f(x) = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Donc la courbe représentative de f ne possède pas d'asymptote horizontale. Ensuite :

$$x^2+x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$$

$$x-1 \underset{x\to 1_-}{\longrightarrow} 0_-, \qquad x-1 \underset{x\to 1_+}{\longrightarrow} 0_+$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} \underset{x\to 1_-}{\longrightarrow} -\infty, \qquad f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} \underset{x\to 1_+}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe représentative de f.

3. Posons $u(x) = x^2 + x - 1$ et $v(x) = x - 1$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ car polynomiales. La fonction f est donc dérivable sur son domaine de définition, comme quotient de fonctions dérivables (avec un dénominateur qui ne s'annule pas). Soit x un réel différent de 1 :

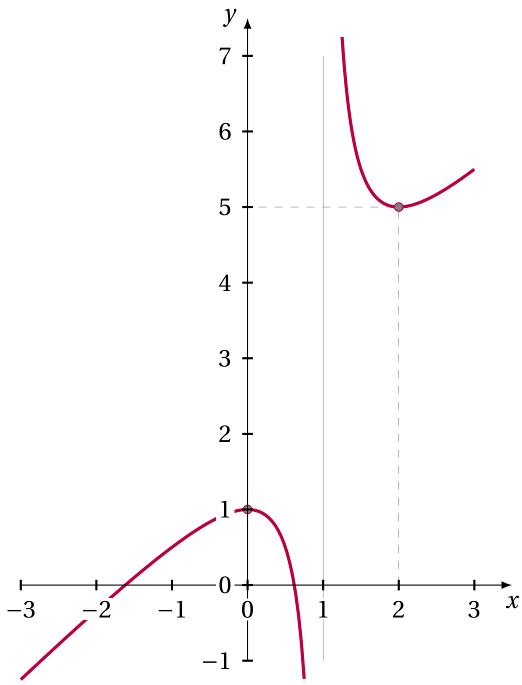
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x-1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Posons $a(x) = x^2 - 2x)$ et $b(x) = (x-1)^2$. Les fonctions a et b sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ (car polynomiales) et la fonction b ne s'annule qu'au point 1, donc la fonction f' est dérivable sur $R \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables. Soit x un réel différent de 1 :

$$f''(x) = \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b(x)^2} = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

4. Pour tout réel x différent de 1, $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

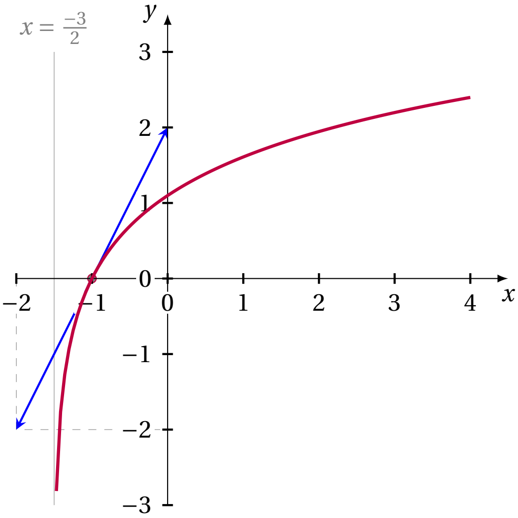


EXERCICE 39. 1. On résout l'inéquation $2x + 3 > 0$:

$$2x + 3 > 0 \iff x > \frac{-3}{2}$$

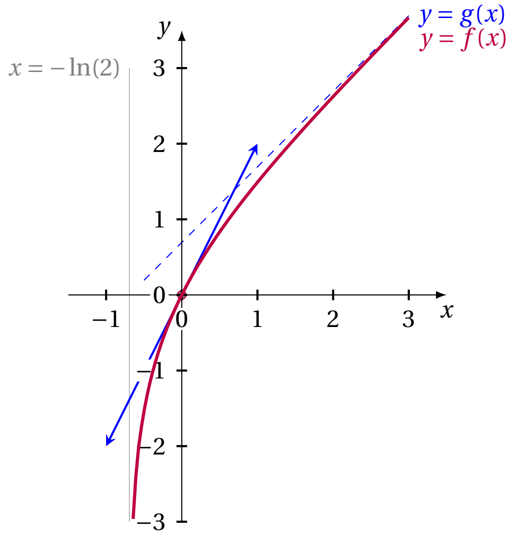
Donc la fonction f est définie sur l'intervalle $I =]\frac{-3}{2}, +\infty[$.

2. La fonction f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} > 0$$
Donc la fonction f est croissante sur I. De plus :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{-3}{2}} f(x) = -\infty$$
(il n'y a pas de forme indéterminée dans ces calculs de limite)
3. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 a pour équation : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) = 2(x+1) + \ln(1) = 2x+2$.



Exercice 40. 1. On a :
$$2e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x > -\ln(2)$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $2e^x - 1 > 0$ est l'intervalle $]-\ln(2), +\infty[$.
2. La fonction f est définie sur $I =]-\ln(2), +\infty[$.
3. Soit x appartenant à I :
$$f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$$
Comme $x \in I$, on a $2e^x - 1 > 0$ (d'après la première question). On a aussi $2e^x > 0$. Donc $f'(x) > 0$.
4. On a :
$$\lim_{x \to -\ln(2)} 2e^x - 1 = 2e^{-\ln(2)} - 1 = 0$$
Donc :
$$\lim_{x \to -\ln(2)} f(x) = -\infty$$
Et :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
5. Soit x un élément de I.
$$f(x) - g(x) = \ln(2e^x - 1) - x - \ln(2) = \ln(2e^x - 1) - \ln(e^x) - \ln(2) = \ln\left(\frac{2e^x - 1}{2e^x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right)$$
Or $\frac{1}{2e^x} > 0$ donc $1 - \frac{1}{2e^x} < 1$, puis en passant au logarithme :
$$f(x) - g(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right) < \ln(1) = 0$$
Enfin :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right) = \ln(1) = 0$$

6. La droite T a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x$
7. La question 5 montre que la droite d'équation $y = g(x)$ est une asymptote (oblique) pour la courbe représentative de f, au voisinage de $+\infty$. La question 5 montre également que la courbe représentative de f se situe partout *en dessous* de son asymptote.



8. On a :

$$f(x) = y \iff \ln(2e^x - 1) = y \iff 2e^x - 1 = e^y \iff e^x = \frac{e^y + 1}{2}$$

   Or $\frac{e^y+1}{2} > 0$ donc on peut passer au logarithme :

$$f(x) = y \iff x = \ln\left(\frac{e^y + 1}{2}\right)$$

Exercice 41. On pose $f(x) = x^3 + ax - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Soit x un réel. On a :

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

Or $3x^2 \geq 0$ et $a > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois (il en est de même pour une fonction strictement décroissante), donc l'équation $f(x) = 0$ possède au plus une solution.

Exercice 42. On souhaite comparer $a = 1000^{1001}$ et $b = 1001^{1000}$. Pour cela on pose $q = \frac{b}{a}$.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Pour tout réel $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

   Comme $1 + x > 0$, le nombre $f'(x)$ est du signe de $-x$. On a donc le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$-x$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

(il est inutile de calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$ pour la suite de l'exercice)

2. Le tableau ci-dessus montre que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$.
3. On a :

$$\ln(q) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a) = 1000\ln(1001) - 1001\ln(1000) = 1000\big(\ln(1001) - \ln(1000)\big) - \ln(1000)$$

$$= 1000\ln\left(\frac{1001}{1000}\right) - \ln(1000) = 1000\ln\left(1 + \frac{1}{1000}\right) - \ln(1000) = 1000\left(\ln\left(1 + \frac{1}{1000}\right) - \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right) - \ln(1000)$$

Donc :

$$\ln(q) = 1000 f\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 - \ln(1000)$$

4. D'après les questions précédentes : $\ln(q) \leq 1 - \ln(1000) < 0$. Donc : $q < 1$, et donc $b < a$.

EXERCICE 43. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ et $f(x) = x^3 + 6x - 6x\ln(x)$.

1. La fonction g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel strictement positif x :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \qquad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty \qquad \text{(pas de forme indéterminée)}$$

3. On a vu que pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

On a $x > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. D'où le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de g	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après le tableau précédent, $g(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$.
5. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6 - 6(\ln(x) + 1) = 3x^2 - 6\ln(x)$$

On remarque que : $f'(x) = 3g(x)$.

6.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{6}{x^2} - 6\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \text{car } \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

7. On a vu que, pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = 3g(x) > 0$. D'où le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
Variations de f	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 44. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1. La fonction g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$.

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{(-1)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)}{x(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

2. D'après la question précédente, $g'(x) < 0$ pour tout réel $x > 0$. Donc la fonction g est décroissante sur son intervalle de définition.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to0_+} g(x) = \lim_{x\to0_+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty \qquad \text{car } \lim_{x\to0_+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
Variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

3. Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2+x}$$

Posons $w(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = u(x)v(x)$. La fonction w est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ (produit de deux fonctions dérivables) et :

$$w'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = e^{w(x)}$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = w'(x)e^{w(x)} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

D'autre part :

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{1+x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

On a donc bien :

$$f'(x) = g(x)f(x)$$

4. Soit $x>0$. On a $g(x)>0$ et $f(x)>0$ donc, avec la question précédente, $f'(x)>0$. D'où le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
Variations de f	$\Vert$	$\searrow$	

EXERCICE 45. 1. $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x+1}$
2. $x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{9}$
3. $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x}$
4. $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \sqrt{2x+1}$
5. $x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$
6. $x \mapsto \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2$
7. $x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$
8. $x \mapsto x - e^{-x}$
9. $x \mapsto \ln(e^x+1)$

Systèmes linéaires

EXERCICE 46. On a :
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$
Pour avoir pour tout réel x différent de 0 et de -1 :
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
il *suffit* donc de choisir a et b de telle sorte que :
$$\begin{cases} a+b=0 \\ a =1 \end{cases}$$
Donc $a=1$ et $b=-1$ conviennent. Finalement, pour tout réel x différent de 0 et de -1, on a :
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

EXERCICE 47. On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel x différent de 1 et de -1 :
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+1}$$

EXERCICE 48. On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel x différent de 0 et de 2 :
$$\frac{3x+1}{(x-2)x} = \frac{\frac{7}{2}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x}$$

EXERCICE 49. Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3+bx^2+cx+\frac{d}{x-1}$$

On a d'une part :

$$(1-x+x^2)^2 = x^4-2x^3+3x^2-2x+1$$

Et d'autre part :

$$ax^3+bx^2+cx+\frac{d}{x-1} = \frac{ax^3(x-1)+bx^2(x-1)+cx(x-1)+d}{x-1} = \frac{ax^4+(-a+b)x^3+(-b+c)x^2-cx+d}{x-1}$$

Donc, pour que :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3+bx^2+cx+\frac{d}{x-1}$$

pour tout réel x différent de 1, il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & =1 \\ -a+b & =-2 \\ \quad -b+c & =3 \\ \qquad -c & =-2 \\ \qquad\quad d & =1 \end{cases}$$

Ce système a pour unique solution : $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=1$. Donc, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = x^3-x^2+2x+\frac{1}{x-1}$$

EXERCICE 50. On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$

EXERCICE 51. On procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve que, pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{x^3}{x^3+1} = 1+\frac{\frac{-1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

EXERCICE 52. Notons x le prix de la bouteille (seule) et y celui du bouchon. On a donc :

$$\begin{cases} x-y=10 \\ x+y=11 \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations : $2x=21$, d'oú : $x=\frac{21}{2}$. Donc la bouteille (seule) coûte $10{,}5$ euros.

EXERCICE 53. Notons x le nombre de garçons et y le nombre de filles dans cette fratrie. Le petit garçon a donc $x-1$ frères et y sœurs. Sa sœurs a x frères et $y-1$ sœurs. On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} x-1=y \\ x \quad\ =2(y-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x-\ \ y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$

La différence L_1-L_2 des deux équations donne : $y=3$. Ensuite, la relation $x-1=y$ donne $x=4$. Le nombre d'enfants dans cette famille est donc $3+4=7$.

EXERCICE 54. On raisonnant comme dans l'exercice précédent, on trouve qu'il y a ici 13 enfants (4 filles et 9 garçons).

EXERCICE 55. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = ae^x+(ax+b)e^x = (ax+(a+b))e^x$$

2. D'après la question précédente, pour que $f : x \mapsto (ax+b)e^x$ soit une primitive de $g : x \mapsto xe^x$, il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a+b = 0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution : $a = 1$, $b = -1$. Donc, une primitive de g est la fonction $x \mapsto (x-1)e^x$.

3. De même, pour que $f : x \mapsto (ax+b)e^x$ soit une primitive de h, il *suffit* que :

$$\begin{cases} a & = 2 \\ a+b = 1 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution : $a = 2$, $b = -1$. Donc, une primitive de h est la fonction $x \mapsto (2x-1)e^x$.

EXERCICE 56. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = a\cos(x) + (ax+b)(-\sin(x)) + c\sin(x) + (cx+d)\cos(x) = (cx+(a+d))\cos(x) + (-ax+(-b+c))\sin(c)$$

2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto x\cos(x)$.
Pour que la fonction f de la première question soit une primitive de g, il *suffit* de choisir a, b, c, d solution du système :

$$\begin{cases} \quad\quad\quad c \quad = 1 \\ a \quad\quad\quad + d = 0 \\ -a \quad\quad\quad\quad = 0 \\ \quad -b+c \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc la fonction $x \mapsto \cos(x) + x\sin(x)$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto x\cos(x)$.

3. De même, pour que la fonction f de la première question soit une primitive de la fonction $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$, il suffit de choisir a, b, c, d solution du système :

$$\begin{cases} \quad\quad\quad c \quad = 1 \\ a \quad\quad\quad + d = 0 \\ -a \quad\quad\quad\quad = 1 \\ \quad -b+c \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc la fonction $x \mapsto (1-x)\cos(x) + (1+x)\sin(x)$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$.