Feuille 0 – Révisions

MPSI, lycée Chateaubriand

2018–2019

Les exercices suivants sont conseillés avant la rentrée. Ils sont volontairement très calculatoires. Le but étant que le calcul ne soit pas un obstacle à votre progression en cours de mathématiques.

Calculs algébriques

Exercice 1

Développer et ordonner : $A = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$.

Exercice 2

Développer et ordonner :

1. $A = (x-1)^3(x^2+x+1)$
2. $B = (x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$
3. $C = (x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$
4. $D = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

Exercice 3

Développer et ordonner :

1. $A = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$
2. $B = (1+x+x^2)^2$
3. $C = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$

Exercice 4

Développer et ordonner :

1. $A = (x+y+z)^2$
2. $B = (x+y)^3$

Exercice 5

Soit x un réel. Simplifier :

$$A=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

Exercice 6

Factoriser :

1. $A=-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
2. $B=25-(10x+3)^2$
3. $C=(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$
4. $D=(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$
5. $E=36-(-4x-4)^2$

Exercice 7

Le résultat suivant pourra être utile : si α est une racine d'un polynôme $P(x)$, alors $P(x)$ peut s'écrire $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme qui peut se calculer, par exemple, par identification des coefficients.

Factoriser :

1. $A=x^2-2x+1$
2. $B=x^2+4x+4$
3. $C=x^2+3x+2$
4. $D=x^2-9x+8$
5. $E=2x^2-4x-16$
6. $F=x^2+3x-28$
7. $G=x^3-1$
8. $H=x^3+1$
9. $I=x^3+6x^2+11x+6$
10. $J=x^4-1$
11. $K=x^6-1$
12. $L=x^{12}-1$

Exercice 8

Factoriser :

1. $A=(x+y)^2-b^2$
2. $B=(x^2+6xy+9y^2)-169x^2$
3. $C=(x+2)^2+x^2(x+2)+x^2-3x-10$
4. $D=28x^3y+63xy-84x^2y$
5. $E=2x^5y^5-8xy$
6. $F=x^2(x-2y)-y^2(x-2y)-x+2y$
7. $G=y^2(a^2+b^2)+16x^4(-a^2-b^2)$
8. $H=x^2-y^2+x+y$
9. $I=xy+x+y+1$
10. $J=xy-x-y+1$
11. $K=x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$

Exercice 9

1. Résoudre les équations $x^2-5x+4=0$ et $2x^2-x-1=0$.
2. Soit x un réel. En supposant qu'elle est bien définie, simplifier l'expression suivante :

$$A=\frac{\left(\frac{x^2-5x+4}{2x+6}\right)}{\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-9}\right)}$$

Exercice 10

Résoudre l'équation : $x^2=2018x-2017$

Exercice 11

Soit x un réel strictement positif. Simplifier : $A=x\sqrt{2x}+2\sqrt{2x^3}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x}}$.

Exercice 12

Soient x et y deux réels strictement positifs. soit $n\in\mathbb{Z}$. Simplifier : $A=\left(\frac{x^{-2n}y^{3n}}{x^{2n}y^{n-1}}\right)^{-1}$.

Exercice 13

Dans cet exercice, toutes les variables sont des réels strictement positifs. Simplifier :

1. $A=x^7x^5x^3$
2. $B=((x^7)^5)^3$
3. $C=\frac{(2x^4)(5x^6)}{(10x^2)^4}$
4. $D=\frac{\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{a^{-2}b^3c^4}}{\frac{3(a^{-1}b^{-2}c)^2}{ac^2}}$
5. $E=\frac{\left(\frac{a^4b^{-4}}{(a^{-2}b^3)^{-2}}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-3}b^2)^3}{a^8b^{-10}}\right)^{-2}}$

Exercice 14

Simplifier :

1. $A = \sqrt{4^2}$
2. $B = \sqrt{(-4)^2}$
3. $C = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$
4. $D = \sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$
5. $E = \sqrt{(2+\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

Exercice 15

On considère l'équation (E) : $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x+3}$.

1. Pour quels réels x l'équation (E) a-t-elle un sens ?
2. Pour quels réels x l'équation (E) est-elle vraie ?

Exercice 16

On considère l'équation (F) : $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$.

1. Pour quels réels x l'équation (F) a-t-elle un sens ?
2. Résoudre l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$.
3. Résoudre l'équation (F).

Exercice 17

Montrer que $21^2 + 220^2 = 221^2$.

Exercice 18

1. Pour quels réels x l'expression $\ln(-3x+1)$ a-t-elle un sens ?
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\ln(-3x+1) = y$ (d'inconnue x) et discuter en fonction du paramètre y.

Exercice 19

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $e^{x+1} + 2 = y$ (d'inconnue x). On discutera suivant la valeur de y.

Exercice 20

Soient a, b, c des nombres réels. On pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Démontrer que $j^3 = 1$.
2. Démontrer que $j^4 = j$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Développer et ordonner :

$$A = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$$

Exercice 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

3. Déduire des questions précédentes le calcul de :

$$S = \sum_{n=1}^{2017} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

Exercice 22

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on pose :

$$f(z) = \frac{z-2}{z-1}$$

1. Résoudre l'équation : $f(z) = i$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
2. Résoudre l'équation : $f(z) = z$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. On pose : $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Vérifier que, pour tout nombre complexe w :

$$w^2 - i = (w-\alpha)(w+\alpha)$$

4. En déduire les solutions w de l'équation $w^2 = i$.
5. Résoudre l'équation : $f(z)^2 = i$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

Exercice 23

Soient a, b, c, d quatre réels. Démontrer que :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

Exercice 24

Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit réels. Démontrer que :

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) &= (ap+bq+cr+ds)^2 + (ad-bp-cs+dr)^2 \\ &\quad + (ar+bs-cp-dq)^2 + (as-br+cq-dp)^2\end{aligned}$$

Suites et récurrence

Exercice 25

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 26

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 27

Soit a un réel. On définit une suite (u_n) en posant $u_1 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4-3u_n}{10}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$.
2. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 28

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Exercice 29

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 30

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 31

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
3. Démontrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.
8. Déterminer les limites des suites (S_n) et (T_n).

Exercice 32

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. En déduire (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq u_n$.
5. Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n).
6. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. On notera ℓ la limite de (u_n) et m la limite de (v_n).
7. Démontrer (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 1$.
8. En déduire (toujours sans récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.
9. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$.
10. En déduire que $\ell = m$ puis déterminer ℓ.

Études de fonctions

Exercice 33

On pose :
$$A(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $A(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $A(x)$.

Exercice 34

On pose :
$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $B(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $B(x)$.

Exercice 35

Pour quel réels x l'expression suivante a-t-elle un sens ?

$$C(x) = \frac{7 - \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Exercice 36

On pose $f(x) = 4 + e^{x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et calculer les limites de f aux bornes de son domaine.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 3 et 4.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) en discutant selon les valeurs de y.

Exercice 37

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les points où $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.
2. Dresser le tableau des variations de f. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dessiner $\mathscr{C}$ et ses tangentes horizontales.

Exercice 38

On pose $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les éventuelles asymptotes verticales et horizontales de la courbe représentative de f.
3. Calculer f' et f''.
4. Dresser le tableau des variations de f et dessiner la courbe représentative de f.

Exercice 39

On pose $f(x) = \ln(2x+3)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier f (variations et limites aux bornes de son domaine).
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse -1.

Exercice 40

On pose $f(x) = \ln(2e^x - 1)$.

1. Résoudre l'inéquation : $2e^x - 1 > 0$.
2. En déduire le domaine I de définition de f.
3. Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle est strictement positive partout sur I.
4. Calculer les limites de f aux bornes de I.
5. On pose $g(x) = x + \ln(2)$. Montrer que $f(x) - g(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right)$. En déduire le signe de $f(x) - g(x)$, ainsi que la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Calculer l'équation de T, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
7. Dessiner les graphes de f et g ainsi que la droite T. Comment interpréter graphiquement la question 5 ?
8. Soit y un réel. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x (discuter en fonction du paramètre y).

Exercice 41

Soit $a > 0$ un réel. Démontrer que l'équation $x^3 + ax - 1 = 0$ possède au plus une solution réelle (on pourra introduire une fonction).

Exercice 42

On souhaite comparer $a = 1000^{1001}$ et $b = 1001^{1000}$. Pour cela on pose $q = \frac{b}{a}$.

1. On pose, pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. Calculer la dérivée f' puis dresser le tableau des variations de f.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$.
3. Montrer que $\ln(q) = 1000 f\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 - \ln(1000)$.
4. Conclure.

Exercice 43

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ et $f(x) = x^3 + 6x - 6x\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de g.
2. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.
5. Calculer la dérivée de f.
6. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
7. Dresser le tableau des variations de f.

Exercice 44

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1. Calculer la dérivée g' (on factorisera et simplifiera au maximum le résultat).
2. En déduire le tableau des variations de g, en précisant la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = g(x)f(x)$.
4. En déduire le tableau des variations de f.

Exercice 45

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{4x+1}$
2. $x \mapsto 2x^3 - \frac{x^2}{3}$
3. $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2}$
4. $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
5. $x \mapsto e^{3x} + x(x-1)$
6. $x \mapsto x(x+1)(x+2)$
7. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$
8. $x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x}$
9. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

Systèmes linéaires

Exercice 46

Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de -1 :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Exercice 47

Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1 et de -1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Exercice 48

Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de 2 :

$$\frac{3x+1}{(x-2)x} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x}$$

Exercice 49

Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1}$$

Exercice 50

Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

Exercice 51

Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{x^3}{x^3+1} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

Exercice 52

Une bouteille et son bouchon coûtent ensemble 11 euros. La bouteille coûte 10 euros de plus que le bouchon. Combien coûte la bouteille ?

Exercice 53

Un petit garçon affirme qu'il a autant de frères que de sœurs. Sa sœur répond qu'elle a deux fois plus de frères que de sœurs. Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Exercice 54

Nestor a deux fois plus de frères que de sœurs. Sa sœur Olympe a trois fois plus de frères que de sœurs. Combien sont-ils en tout ?

Exercice 55

1. Soient a et b deux réels. Dériver la fonction $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto xe^x$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto (2x+1)e^x$.

Exercice 56

1. Soient a, b, c, d, quatre réels. Dériver la fonction $f : x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto x\cos(x)$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto x(\cos(x)+\sin(x))$.