

Voici des exercices plutôt *calculatoires*. Le cours de mathématiques de MPSI ne se résumera pas à des calculs, bien au contraire ! Cependant, s'entraîner à calculer est essentiel pour bien commencer l'année.

Calculs algébriques

EXERCICE 1. Développer et ordonner : $A = (2x - \frac{1}{2})^3$.

EXERCICE 2. Développer et ordonner :

1. $A = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
2. $B = (x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)$
3. $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$
4. $D = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$

EXERCICE 3. Développer et ordonner :

1. $A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
2. $B = (1 + x + x^2)^2$
3. $C = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

EXERCICE 4. Développer et ordonner :

1. $A = (x + y + z)^2$
2. $B = (x + y)^3$

EXERCICE 5. Soit x un réel. Simplifier :

$$A = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

EXERCICE 6. Factoriser :

1. $A = -(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$
2. $B = 25 - (10x + 3)^2$
3. $C = (6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$
4. $D = (-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$
5. $E = 36 - (-4x - 4)^2$

EXERCICE 7. Le résultat suivant pourra être utile : si α est une racine d'un polynôme $P(x)$, alors $P(x)$ peut s'écrire $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme qui peut se calculer, par exemple, par identification des coefficients.

Factoriser :

1. $A = x^2 - 2x + 1$
2. $B = x^2 + 4x + 4$
3. $C = x^2 + 3x + 2$
4. $D = x^2 - 9x + 8$
5. $E = 2x^2 - 4x - 16$
6. $F = x^2 + 3x - 28$
7. $G = x^3 - 1$
8. $H = x^3 + 1$
9. $I = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
10. $J = x^4 - 1$
11. $K = x^6 - 1$
12. $L = x^{12} - 1$

EXERCICE 8. Factoriser :

1. $A = (x + y)^2 - b^2$
2. $B = (x^2 + 6xy + 9y^2) - 169x^2$
3. $C = (x + 2)^2 + x^2(x + 2) + x^2 - 3x - 10$
4. $D = 28x^3y + 63xy - 84x^2y$
5. $E = 2x^5y^5 - 8xy$
6. $F = x^2(x - 2y) - y^2(x - 2y) - x + 2y$
7. $G = y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$
8. $H = x^2 - y^2 + x + y$
9. $I = xy + x + y + 1$
10. $J = xy - x - y + 1$
11. $K = x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

EXERCICE 9.

1. Résoudre les équations $x^2 - 5x + 4 = 0$ et $2x^2 - x - 1 = 0$.
2. Soit x un réel. En supposant qu'elle est bien définie, simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{\left(\frac{x^2 - 5x + 4}{2x + 6}\right)}{\left(\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9}\right)}$$

EXERCICE 10. Résoudre l'équation : $x^2 = 2020x - 2019$

EXERCICE 11. Soit x un réel strictement positif. Simplifier : $A = x\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x^3} + \frac{2x^2}{\sqrt{2x}}$.

EXERCICE 12. Soient x et y deux réels strictement positifs, soit $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier :

$$A = \left(\frac{x^{-2n}y^{3n}}{x^{2n}y^{n-1}}\right)^{-1}$$

EXERCICE 13. Dans cet exercice, toutes les variables sont des réels strictement positifs. Simplifier :

1. $A = x^7x^5x^3$
2. $B = ((x^7)^5)^3$
3. $C = \frac{(2x^4)(5x^6)}{(10x^2)^4}$
4. $D = \frac{\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{a^{-2}b^3c^4}}{\frac{3(a^{-1}b^{-2}c)^2}{ac^2}}$
5. $E = \frac{\left(\frac{a^4b^{-4}}{(a^{-2}b^3)^{-2}}\right)^3}{\left(\frac{4(a^{-3}b^2)^3}{a^8b^{-10}}\right)^{-2}}$

EXERCICE 14. Simplifier :

1. $A = \sqrt{4^2}$
2. $B = \sqrt{(-4)^2}$
3. $C = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$
4. $D = \sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$
5. $E = \sqrt{(2 + \sqrt{7})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

EXERCICE 15. On considère l'équation (E) : $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x+3}$.

1. Pour quels réels x l'équation (E) a-t-elle un sens ?
2. Pour quels réels x l'équation (E) est-elle vraie ?

EXERCICE 16. On considère l'équation $(F) : x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$.

1. Pour quels réels x l'équation (F) a-t-elle un sens ?
2. Résoudre l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$.
3. Résoudre l'équation (F) .

EXERCICE 17. Montrer que $21^2 + 220^2 = 221^2$.

EXERCICE 18.

1. Pour quels réels x l'expression $\ln(-3x + 1)$ a-t-elle un sens ?
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\ln(-3x + 1) = y$ (d'inconnue x) et discuter en fonction du paramètre y .

EXERCICE 19. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $e^{x+1} + 2 = y$ (d'inconnue x). On discutera suivant la valeur de y .

EXERCICE 20.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

2. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

3. Dédurre des questions précédentes le calcul de :

$$S = \sum_{n=1}^{2019} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

EXERCICE 21. Soient a, b, c, d quatre réels. Démontrer que :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Suites et récurrence

EXERCICE 22. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 23. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

EXERCICE 24. Soit a un réel. On définit une suite (u_n) en posant $u_1 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4 - 3u_n}{10}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13}) (\frac{-3}{10})^{n-1}$.
2. Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 25. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

EXERCICE 26. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXERCICE 27. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

EXERCICE 28. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 2$.
3. Démontrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n .
8. Déterminer les limites des suites (S_n) et (T_n) .

EXERCICE 29. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. En déduire (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq u_n$.
5. Étudier les variations des suites (u_n) et (v_n) .
6. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. On notera ℓ la limite de (u_n) et m la limite de (v_n) .
7. Démontrer (sans récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 1$.
8. En déduire (toujours sans récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.
9. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$.
10. En déduire que $\ell = m$ puis déterminer ℓ .

Études de fonctions

EXERCICE 30. On pose :

$$A(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $A(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $A(x)$.

EXERCICE 31. On pose :

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{1-x}}}$$

1. Pour quel réels x l'expression $B(x)$ a-t-elle un sens ?
2. Lorsqu'elle a un sens, simplifier l'expression $B(x)$.

EXERCICE 32. Pour quel réels x l'expression suivante a-t-elle un sens ?

$$C(x) = \frac{7 - \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EXERCICE 33. On pose $f(x) = 4 + e^{x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f , et calculer les limites de f aux bornes de son domaine.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 3 et 4.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) en discutant selon les valeurs de y .

EXERCICE 34. Pour tout réel x , on pose : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

1. Déterminer les points où \mathcal{C} admet une tangente horizontale.
2. Dresser le tableau des variations de f . Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dessiner \mathcal{C} et ses tangentes horizontales.

EXERCICE 35. On pose $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les éventuelles asymptotes verticales et horizontales de la courbe représentative de f .
3. Calculer f' et f'' .
4. Dresser le tableau des variations de f et dessiner la courbe représentative de f .

EXERCICE 36. On pose $f(x) = \ln(2x+3)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier f (variations et limites aux bornes de son domaine).
3. Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse -1 .

EXERCICE 37. On pose $f(x) = \ln(2e^x - 1)$.

1. Résoudre l'inéquation : $2e^x - 1 > 0$.
2. En déduire le domaine I de définition de f .
3. Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle est strictement positive partout sur I .
4. Calculer les limites de f aux bornes de I .
5. On pose $g(x) = x + \ln(2)$. Montrer que $f(x) - g(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2e^x}\right)$. En déduire le signe de $f(x) - g(x)$, ainsi que la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Calculer l'équation de T , la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
7. Dessiner les graphes de f et g ainsi que la droite T . Comment interpréter graphiquement la question 5 ?
8. Soit y un réel. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x (discuter en fonction du paramètre y).

EXERCICE 38. Soit $a > 0$ un réel. Démontrer que l'équation $x^3 + ax - 1 = 0$ possède au plus une solution réelle (on pourra introduire une fonction).

EXERCICE 39. On souhaite comparer $a = 1000^{1001}$ et $b = 1001^{1000}$. Pour cela on pose $q = \frac{b}{a}$.

1. On pose, pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. Calculer la dérivée f' puis dresser le tableau des variations de f .
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$.
3. Montrer que $\ln(q) = 1000f\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 - \ln(1000)$.
4. Conclure.

EXERCICE 40. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$ et $f(x) = x^3 + 6x - 6x\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de g .
2. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de g .
4. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .
5. Calculer la dérivée de f .
6. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

7. Dresser le tableau des variations de f .

EXERCICE 41. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$.

1. Calculer la dérivée g' (on factorisera et simplifiera au maximum le résultat).
2. En déduire le tableau des variations de g , en précisant la limite de g en $+\infty$ et en 0 .
3. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = g(x)f(x)$.
4. En déduire le tableau des variations de f .

EXERCICE 42. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{4x+1}$
2. $x \mapsto 2x^3 - \frac{x^2}{3}$
3. $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2}$
4. $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
5. $x \mapsto e^{3x} + x(x-1)$
6. $x \mapsto x(x+1)(x+2)$
7. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$
8. $x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x}$
9. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

Systèmes linéaires

EXERCICE 43. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de -1 :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

EXERCICE 44. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1 et de -1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

EXERCICE 45. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de 2 :

$$\frac{3x+1}{(x-2)x} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x}$$

EXERCICE 46. Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{(1-x+x^2)^2}{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x-1}$$

EXERCICE 47. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

EXERCICE 48. Déterminer des réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{x^3}{x^3+1} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

EXERCICE 49.

1. Soient a et b deux réels. Dérivée la fonction $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto xe^x$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto (2x+1)e^x$.

EXERCICE 50.

1. Soient a, b, c, d , quatre réels. Dérivée la fonction $f : x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$.
2. En utilisant la première question, déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto x\cos(x)$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto x(\cos(x) + \sin(x))$.