

# GRANDEUR ET DÉCADENCE DES MATHÉMATIQUES MODERNES

Le titre de cette conférence, « Grandeur et décadence des mathématiques modernes », est un peu accrocheur, volontairement ambigu et mérite quelques précisions. Les professionnels, spécialistes des maths, ont deviné ce dont il s'agit. Les autres, peut-être. Commençons par une affirmation qui lèvera toute ambiguïté : les mathématiques sont et resteront longtemps encore une science « moderne » appelée à se développer. Ne nous y trompons pas : le siècle des mathématiques est le XX<sup>ème</sup> siècle. La recherche mathématique vit, défraie la chronique régulièrement. L'annonce de la démonstration du Théorème de Fermat par Andrew Wiles a fait la une des journaux du monde entier. La technologie progresse, des disciplines comme l'analyse numérique s'étoffent, l'informatique issue des mathématiques prend son autonomie. D'autres champs, des probabilités à la géométrie différentielle, en passant par l'analyse fonctionnelle sont, en France, très actifs. On peut toujours parler d'école française des mathématiques.

Il ne s'agit donc pas, ici, de proclamer la mort des mathématiques. Bien au contraire. Et si les nouveaux domaines des mathématiques restent complètement inconnus des lycéens d'aujourd'hui, cela ne permet pas de se lamenter sur leur inculture. La perception que les mathématiciens ont de leur discipline, les différentes synthèses de ce siècle ont produit un point de vue « moderne » sur la matière : les contenus peuvent dater du XIX<sup>ème</sup> siècle, leur compréhension a évolué. C'est de cela et de leur transmission dans l'enseignement secondaire, en France, qu'il est question aujourd'hui.

Un quart de siècle s'est écoulé depuis la mise en place de la réforme dite des « maths modernes ». Cette réforme, qui se voulait une rénovation de l'enseignement des mathématiques, a été une vraie révolution et a créé un traumatisme durable dans la société. 25 ans après, un bilan et un regard moins passionné sont possibles. De la *Gazette des mathématiciens* à l'*Encyclopædia universalis*, de nombreux articles sont parus pour cet anniversaire. Parmi les auteurs, les uns, comme historiens, expliquent la mise en œuvre de cette réforme, les autres, com-

me pédagogues, décortiquent les raisons de l'échec, d'autres encore en tirent des enseignements...

### **UN HISTORIQUE (G. GABILLARD)**

Évolution de l'enseignement des maths de l'Université au Collège : tout d'abord un historique « local »

Cette conférence arrive à la suite d'un groupe interdisciplinaire qui a travaillé au cours de l'année 1993, au lycée Chateaubriand. L'Encyclopædia universalis a consacré un de ses suppléments annuels aux sciences. Intitulé « La science au présent », c'est un ouvrage remarquablement fait où se trouvent exposées la science et la technologie d'aujourd'hui, à travers divers chapitres très documentés. Parmi ceux-ci, un article de Rudolf Bkouche : « L'enseignement des mathématiques en France ». Cet article, qui fut distribué à de nombreux collègues, analyse la réforme des maths modernes. Paradoxalement, son écho a été plus fort chez les littéraires que chez les mathématiciens. Pour ces derniers, l'analyse de Rudolf Bkouche ne faisait qu'exprimer ce que chacun percevait de la réforme. Il y a, chez les mathématiciens, un consensus. Quant aux littéraires, ils découvraient, pour la première fois, peut-être, un exposé des motivations des promoteurs de la réforme. Dégagé de toute technicité mathématique, ce que nous ne pourrions pas totalement éviter aujourd'hui, l'article semblait susciter quelques échos chez les professeurs de Lettres aux prises avec une réforme aux motivations tout aussi généreuses que celle des maths modernes...

### **1 . La réforme des maths modernes a 25 ans**

En disant cela, on pense avoir une bonne perspective. Il n'en est rien. Les maths modernes n'ont pas 25 ans, elles participent d'un mouvement beaucoup plus ancien dans la communauté scientifique. Que les mathématiques modernes aient pris une telle importance en France montre aussi qu'on ne peut abstraire la communauté éducative de celle de la nation. Nous suivrons deux chronologies artificiellement séparées : l'une mathématique, l'autre administrative.

### **2 . Une chronologie mathématique**

Notre chronologie aurait pu débiter au début du XX<sup>ème</sup> siècle, à l'époque du positivisme. Les dix problèmes de Hilbert et, plus encore, le programme d'Erlangen de Klein s'inscrivent totalement dans ce mouvement. C'est l'époque des certitudes et de l'axiomatique triomphante où les mathématiciens ont de bonnes raisons de penser que tout énoncé mathématique peut être démontré ou sinon infirmé. Nous commencerons aux années 30 avec deux noms. Le premier, Kurt Gödel, énonce et démontre son théorème d'incomplétude (1931) qui met à bas le programme de Hilbert. Le second, Nicolas Bourbaki, est né probablement

en 1934. A cette époque la science mathématique est à la fois très développée et très fragmentée. Il y a un besoin important de clarification et d'unité. Weyl, Dieudonné, Cartan et quelques autres créent le groupe Bourbaki. C'est le début de ce qu'on peut appeler une encyclopédie moderne des mathématiques. Encyclopédie qui révèle l'algèbre comme un puissant outil unificateur. Le groupe Bourbaki aura une influence considérable sur la formation des universitaires.

1954 : Gustave Choquet remplace Georges Valiron en Sorbonne, il prend la chaire de calcul différentiel et intégral. C'est une date importante qui marque le début de la rénovation à l'université. Un jeune professeur, formé à « l'école Bourbaki », arrive. En moins d'une dizaine d'années, la vision des mathématiques et de l'enseignement universitaire est modifiée. Un grand courant d'air : la vieille garde est soit balayée, soit convertie. Propos exagérés... On peut néanmoins affirmer qu'en 1964, l'Université est passée entièrement du côté de cette nouvelle perception des mathématiques qui place l'algèbre au centre des maths. En dix ans, les « maths modernes » ont converti les universitaires : la rénovation est réussie.

### **3 . Chronologie politique et administrative**

Il reste à convertir un tout autre public, celui de l'enseignement secondaire. L'autonomie des universités a, malgré les blocages et les conservatismes, permis à une nouvelle équipe d'imposer ses vues novatrices. Il ne peut en être ainsi dans l'enseignement secondaire. On ne peut toucher à celui-ci sans réaction du corps social et des gouvernements. Il ne faut pas non plus en exagérer l'importance : le lycée est, dans les années soixante, un lieu où se concentre une élite. Dix pour cent d'une classe d'âge arrivait au baccalauréat : on mesure le chemin parcouru depuis lors. Le lycée est clairement un lieu de savoir dispensé à une minorité. Il se situe conceptuellement dans le giron de l'Université.

Le vrai lieu du débat public est le collège. De la fin de la guerre au début des années 70, du plan Langevin-Wallon à la réforme Fouchet, nous verrons la disparition des classes de fin d'études primaires pour leur transformation en CEG (Collèges d'enseignement général) ou CET (Collèges d'enseignement technique) puis la création des CES (Collèges d'enseignement secondaire) qui unifieront premier cycle des lycées et CEG. Ce qui n'ira pas sans quelques problèmes corporatifs, notamment la coexistence de deux catégories d'enseignants : PEGC (Professeurs d'enseignement général) et certifiés, les premiers issus de l'enseignement primaire, les seconds de l'enseignement des lycées. Mais cela se fera progressivement et inéluctablement. Répétons-le, le collège est le lieu de la démocratisation du savoir. Aujourd'hui un tel débat s'est déplacé au lycée et bientôt à l'université.

Le contexte politique ne peut lui non plus être absent du débat. Au plus haut niveau, une prise de conscience de l'importance de la science s'est faite. La science est un enjeu national. Le CNRS, créé par le Front populaire avant guerre en est le signe avant-coureur. La guerre, la bombe atomique ont révélé au monde entier qu'il n'y a pas de pays important sans science et technologie développées. La politique gaullienne sera, à ce propos, d'une constance remarquable. Le CEA (Commissariat à l'énergie atomique) sera créé en 1946. Un nouvel élan sera donné après 1958, et de nouveaux défis technologiques, tel Concorde, seront lancés. Il y a, en France, unanimité politique et populaire autour de la science. Science ou technique, la confusion existe. Mais la séparation que l'on fait aujourd'hui entre ces deux domaines est peut-être exagérée...

Certains commenceront à s'inquiéter de cette confiance apparemment sans limites. Ils sont alors très minoritaires : les débats éthiques ne font que débiter. Einstein aux Etats-Unis, Jean Rostand en France seront les précurseurs.

Notre sujet, la réforme des maths modernes, ne peut faire abstraction de tout ce contexte. Les gouvernements font confiance aux scientifiques. Le budget de la recherche est en pleine croissance. La nouvelle école mathématique arrive avec une conviction et une réussite remarquable. Il faut rénover l'enseignement des mathématiques, en faire une science capable de relever les défis du siècle. Nous l'avons fait à l'université, cela marche : il faut aller de l'avant et réformer le second degré. Quand, de leur côté, les gouvernements sont convaincus de la nécessité d'une refonte du second degré, cela donne un mouvement irrésistible. Énumérons les dates :

1946 Plan Langevin-Wallon

1952 Création des CPR (Centres pédagogiques régionaux) où seront formés les professeurs du second degré)

1957 Création des IPES (mise en place du prérecrutement de professeurs)

1965 Début de la réforme Fouchet (filiales A,B,C,D...).

Tout ceci tend vers un seul but : unifier l'enseignement secondaire, et y dispenser un enseignement moderne. Les filières (A,B...) n'ont d'autre ambition que de gagner en efficacité : les savoirs, scientifiques notamment, deviennent si importants qu'il faut diversifier. Dès la mise en place de la réforme, les élèves de seconde C auront un cours de maths modernes. Et, contrairement à ce qu'on pourrait imaginer aujourd'hui, cela se passe bien. Des enseignants motivés, un public trié font que cet enseignement est bien perçu. L'expérience acquise à l'Université a pu, avec succès, se déplacer au lycée.

L'Éducation Nationale n'aura plus d'hésitation. La quasi-unanimité des mathématiciens (Universitaires, APMEP1), à la notable exception de l'Académie des sciences, se prononce pour la réforme. La mise en place des CES donnera le signal de départ : à la rentrée 1969, les maths modernes seront enseignées aux élèves de 6e, à la rentrée 1973, tous les collégiens suivront cet enseignement. Ce qui donnera :

Un ensemble  $D$  est appelé droite affine réelle lorsqu'à tout couple  $R = (0, i)$  de points distincts de  $D$  est associée une bijection unique  $f_R$  de  $D$  sur l'ensemble des points réels vérifiant  $f_R(0) = 0$ ,  $f_R(i) = 1$ , et ce la de telle manière que si  $R'$  est un autre couple de points distincts de  $D$  il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait pour tout point  $M$  de  $D$  :

$$f_{R'}(M) = a f_R(M) + b.$$

Un tel couple s'appelle un repère de  $D$  et  $f_R(M)$  l'abscisse de  $M$  dans ce repère.

### **LA RÉFORME AU QUOTIDIEN (C. DARIDOR)**

En direct des collègues : les difficultés des élèves et des enseignants.

Les enseignants et la réforme.

Il s'agit, pour les enseignants, d'enseigner des contenus que la plupart d'entre eux, en collège, maîtrisent mal, avec, de plus, des instructions extrêmement directives.

En effet, la majorité a reçu une formation classique. De plus, l'explosion scolaire, la création des Collèges d'enseignement secondaire, regroupant les premiers cycles des lycées et les Collèges d'enseignement général, a conduit à un recrutement important de maîtres auxiliaires et d'instituteurs dont la formation scientifique se limite au baccalauréat.

Manquant d'une formation théorique adéquate, la plupart vont se réfugier dans des cours appuyés par les manuels, superbes monuments de théorie pour la théorie, et ils seront confortés dans cette attitude par les corps d'inspection eux-mêmes qui, le plus souvent, vont s'efforcer d'obtenir une application rigoureuse de ces programmes devenus irréalistes par excès de théorisation.

Comment, dès lors, adapter les contenus aux élèves ? Et quel contenu !

Voici quelques exemples extraits de manuels « bibles » de l'époque, tant pour les enseignants que pour les inspecteurs.

Classe de 6<sup>ème</sup> : soit un ensemble  $A$  et un ensemble  $B$ . S'il existe une bijection de  $A$  vers  $B$  et une bijection de  $B$  vers  $A$ , nous dirons que les ensembles  $A$  et  $B$  ont même cardinal et nous écrirons :  $\text{card } A = \text{card } B$ .

Tout ça pour dire que A et B ont le même nombre d'éléments !

Classe de 5<sup>ème</sup> : une relation S dans l'ensemble B de graphe S est symétrique si et seulement si, quels que soient les éléments x et y de B, distinct ou non, si (x, y) appartient à S alors (y, x) appartient à S.

Pour introduire les entiers relatifs en 5<sup>ème</sup> :

Soit R la relation dans  $N \times N$  définie par :

(a, b) R (a', b') signifie : si  $a \geq b$ ,  $a - b = a' - b'$   
si  $b \geq a$ ,  $b - a = b - a'$ .

La relation R, étant une relation d'équivalence, permet de réaliser une partition de  $N \times N$ .

Définition d'une droite réelle en 4<sup>ème</sup> :

Un ensemble D d'éléments appelés points est une droite réelle s'il existe une famille de bijections de D sur l'ensemble des nombres réels, appelés graduations de D vérifiant l'axiome suivant :

pour deux graduations g et g' de la même droite réelle D, il existe deux nombres réels a et b, tels que pour tout point M de D on a  $g'(M) = a \cdot g(M) + b$ .

Ce ne sont que quelques exemples. Tout le cours est de ce type de la 6<sup>ème</sup> à la 3<sup>ème</sup>. Quelle activité de réinvestissement peut-on alors mettre en place ?

Les enseignants sont affolés, beaucoup d'élèves aussi !

Des notions leur semblent compliquées à plaisir et, face au carcan des instructions, ils ne se sentent pas le droit (ils ne l'ont d'ailleurs pas) de les présenter différemment.

Outre une théorisation et un formalisme à outrance, un autre problème apparaît très vite : celui de la langue et du vocabulaire. Le public du collège est un public hétérogène, où beaucoup d'élèves maîtrisent encore mal la langue.

Des définitions, propriétés... telles que celles citées en exemple plus haut, ne sont pas à la portée d'un grand nombre d'élèves. S'ajoute à cela tout un vocabulaire nouveau et ésotérique dès la 6<sup>e</sup> : commutative, réflexive, application, bijection... De plus, une symbolisation systématique, voulue dans un souci de concision, engendre auprès des élèves une perte de sens. Cet enseignement, qui se veut plus égalitaire, ne fait qu'accentuer des inégalités, non pas sur les objets mathématiques eux-mêmes, mais sur le plan culturel.

Cette réforme va cependant avoir des effets positifs, qui existent encore maintenant.

Face à l'ampleur des difficultés rencontrées lors de l'application de la réforme, les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) vont se développer. Les premiers ont été créés en 1968, malgré les réticences ministérielles. Devant l'affolement général, leur mise en place va s'accélérer. Les enseignants sentent la nécessité de se former, de se rencontrer, d'échanger. Échanger par l'intermédiaire de l'IREM, bien sûr, mais aussi à l'intérieur de chaque établissement. Le travail en équipe des enseignants de maths s'est développé bien avant qu'il ne soit conseillé dans toutes les disciplines. C'est sans doute en mathématiques que la réflexion pédagogique a été le plus poussée. Les IREM qui existent toujours, sont des organismes enviés par les autres disciplines.

La réforme a fait prendre conscience, à tous les niveaux, que la cohérence mathématique ne suffit pas pour fonder un programme, qu'abstraction et concepts ne doivent pas intervenir de façon prématurée, que les élèves puissent donner du sens à leurs apprentissages et qu'ils doivent, à travers des activités de réinvestissement, des résolutions de problèmes, pouvoir « faire » des maths.

#### **BILAN ET PERSPECTIVES (J. HOUEBINE)**

Quels enseignements peut on tirer de cette réforme ?

Doit-on la condamner ?

Le bilan de cette réforme n'est pas si négatif qu'on pourrait le penser. Ne défendons pas les contenus : la vision des mathématiques pour collégiens qu'ils entraînaient était totalement inadaptée et réductrice. Néanmoins la réforme a permis de prendre conscience de plusieurs choses importantes. Ce qui peut passer pour des évidences ne l'était pas et ne l'est, peut-être, toujours pas.

La réforme, on l'a vu, n'est pas née sans concertation, des savants éminents l'ont proposée et la grande majorité des mathématiciens (dont l'APMEP) était favorable. La réforme a été, d'une certaine façon, progressive : d'abord l'université puis le lycée et enfin le collège. Enfin la France n'était pas isolée, au moins dans la francophonie, puisque Papy en Belgique était le promoteur d'une réforme similaire. Finalement le seul inconvénient était qu'elle était inapplicable ! Il y avait donc un problème et il fallait le résoudre. Les enseignants de mathématiques ont obtenu la création des Instituts de Recherche en Enseignements des Mathématiques. Ces instituts, chargés de la formation des professeurs, avaient été promis par le ministère, mais les difficultés importantes rencontrées ont accéléré leur mise en place. Le bouleversement des programmes était tel que former les formateurs était incontournable. Les IREM vont être ce lieu où enseignants, universitaires, didacticiens et épistémologues se rencontrent, débattent de leur matière commune, les mathématiques, et cherchent ensemble à résoudre les problèmes d'enseignement.

On l'a vu, cela ne suffira pas à faire passer l'impossible. Il a bien fallu reconnaître qu'une présentation formelle des mathématiques était totalement inadaptée à un public de jeunes collégiens, et de modifications en modifications les mathématiques au collège ont été progressivement remaniées. Autant les mathématiques modernes ont été traumatisantes, autant le retour à la raison est passé inaperçu : les maths au collège ne sont plus un problème.

Le dysfonctionnement mis à jour à l'occasion de la réforme des maths modernes n'est pas le manque de concertation qui a réellement existé, mais le fait que celle-ci a été accaparée par les seuls « experts » existants : les savants universitaires. La recherche en enseignement des mathématiques, la didactique n'en étaient qu'à leurs débuts et n'ont pas eu à intervenir. Ce que l'on sait aujourd'hui est que chacun des acteurs a son mot à dire. Les savants expriment les besoins de la science qui se fait, les didacticiens réfléchissent à sa faisabilité pour un public donné, le ministère représente la société et les enseignants qui sont les premiers impliqués doivent travailler en concertation. Chacune de ces quatre parties est incontournable, en oublier une rend le projet inadaptable ou inapplicable. On pourrait noter qu'aujourd'hui, les savants universitaires sont plutôt peu présents dans les commissions. Faut-il y chercher la cause de la modestie des programmes des lycées ?

Le travail qui a été fait dans les IREM est, malheureusement, resté isolé. Seules les mathématiques ont cette instance de concertation. Rien dans les autres disciplines et, au risque de choquer, on peut avancer nombre de disciplines qui sont encore à la préhistoire de l'enseignement. Prenons pour exemple la dernière réforme qui a vu le jour au lycée. Issue du constat que la structure des classes des lycées était devenue inadaptée et surtout trop orientée sur la filière C, les responsables politiques ont mis en chantier une nouvelle réforme. Un relatif consensus est apparu autour de la création de trois filières, littéraire, économique et scientifique, dans l'enseignement général, quand, tout à coup, ce qu'il convient d'appeler un lobby emmené par d'éminents académiciens, se manifeste, pétitionne, proteste et modifie à lui tout seul l'équilibre de la réforme au risque de la dénaturer. La défense des lettres classiques est certes estimable, mais cela vaut-il la peine de tout bouleverser ? Cette « crise » révèle deux choses. D'abord, bien évidemment, le fait que le latin et le grec provoquent suffisamment de nostalgie dans l'opinion (mais de quelle opinion s'agit-il ?) pour faire remettre en cause une réforme, ensuite et surtout l'incapacité des savants « gréco-latins » à s'intégrer dans les groupes de travail ministériels. Faut-il y voir la preuve de l'insuffisance de la réflexion épistémologique dans cette discipline ? Sans doute, mais d'autres disciplines (les langues vivantes pour ne citer qu'elles en didacti-

que) ne sont pas plus avancées, les mathématiques faisant plutôt figure d'exception dans l'enseignement français.

Ce n'est pas avec des lobbies que l'on fait des réformes, mais avec tous les acteurs concernés. Ce que la crise des maths modernes nous a appris est qu'il ne peut y avoir de réforme acceptée sans réflexion sur les disciplines. Les besoins des universitaires doivent être exprimés, l'importance de la matière estimée, la faisabilité du programme pour un public donné réellement pensée, et les enseignants formés. Les IREM, un instant menacés par la création des IUFM, sont une chance pour les mathématiques. Loin d'être une exception, ils pourraient servir de modèle pour toutes les disciplines d'enseignement.

**Jean HOUEBINE**

**Professeur à l'Université de Rennes I, ancien directeur de l'I.R.E.M.**

**Gilbert GABILLARD**

**Professeur de Mathématiques en Classes Préparatoires au Lycée Chateaubriand**

**Chantal DARIDOR**

**Professeur de Mathématiques au Lycée de Bain de Bretagne**

